This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

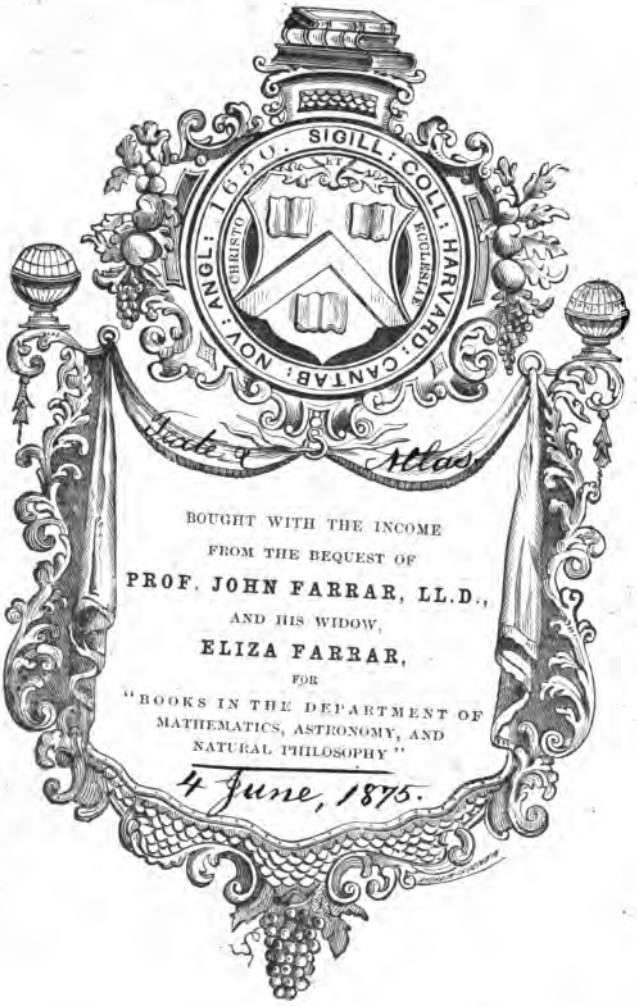
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 5708.73.2



Index Atlas

BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"

4 June, 1875.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE

3041. — Abbeville. Imprimerie Briez, C. Paillart et Retaux.

Atas. 32, 14a

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE

DESCRIPTIVE

PAR

(Alphonse) Joseph
J. ADHÉMAR

CINQUIÈME ÉDITION

PARIS
ARMAND COLIN ET Cie, ÉDITEURS
16, RUE DE CONDÉ, 16

1873

Math 5708.73.2

1875, June 4.
Farrar Fund.
(Texte & Atlas.)

Avis. Les nombres placés en tête du côté opposé au numéro de chaque page, indiquent la planche. Les numéros des figures sont placés dans le texte. Enfin, les nombres seuls entre parenthèses sont des renvois aux articles précédents.

Le numéro de chaque article est au commencement de l'*alinéa*.

PRÉFACE.

Cet ouvrage étant destiné aux personnes qui commencent l'étude de la Géométrie descriptive, j'ai cru devoir adopter la méthode d'induction qui permet d'augmenter graduellement les difficultés et de ne généraliser les principes qu'après avoir familiarisé le lecteur par la comparaison de nombreux exemples, avec les caractères qui distinguent chacun d'eux et qui déterminent la place qu'il doit occuper dans l'ordre général.

Mon but étant surtout de préparer aux applications, j'ai dû attirer l'attention sur les propriétés particulières, d'autant plus que c'est dans l'habitude de découvrir ces propriétés et d'en profiter pour abréger le travail ou lui donner plus de précision, que consiste toute l'habileté du praticien.

Les traités d'application que j'ai publiés m'ont fait sentir la nécessité de donner plus d'extension à quelques parties des principes. Ainsi, j'ai cherché à rendre aussi

complète que possible la théorie des cylindres et cônes circulaires, parce qu'elle forme la base de presque toutes les applications.

Je me suis appliqué à bien faire comprendre le parti avantageux que l'on peut tirer des projections auxiliaires ; et j'ai tâché, surtout, de familiariser le lecteur avec les dispositions d'épure usitées dans la pratique. C'est aussi dans ce but que j'ai ajouté un chapitre sur les plans cotés, qui permettent d'adopter immédiatement le système de plans de projection qui convient le mieux à la question proposée.

J'ai donné des méthodes nouvelles et élémentaires pour la rectification et la quadrature des courbes ; problèmes que l'on n'avait résolus jusqu'à présent que par des calculs très-pénibles.

J'ai dû admettre quelques théorèmes qui ne peuvent être convenablement démontrés que par l'algèbre ; je n'ai fait, en cela, que suivre l'exemple des auteurs qui m'ont précédé. Il est généralement reconnu que le langage algébrique est nécessaire pour mettre en évidence certaines propriétés dont la Géométrie descriptive ne peut donner que la traduction. Le lecteur qui voudra compléter ses études, devra donc avoir recours aux traités d'Algèbre appliquée, pour la démonstration des théorèmes dont je viens de parler. D'ailleurs, lorsqu'il s'agit des lignes ou des surfaces du second degré, il est tout naturel de renvoyer aux ouvrages qui traitent de ces matières ; de même que l'on renvoie à la Géomé-

trie élémentaire, toutes les fois qu'il s'agit des propriétés du cercle, de la ligne droite ou du plan.

J'avais publié dans le recueil des exercices et questions diverses quelques problèmes qui ont été placés dans l'édition actuelle au rang qui convient le mieux à l'enchaînement des idées.

Avant de terminer cet avertissement, je dois rappeler au lecteur qu'il ne peut apprendre la Géométrie descriptive que la règle et le compas à la main ; il ne doit lire qu'en faisant à mesure toutes les constructions indiquées. Je l'engage même à tâcher de résoudre seul, et sans consulter le texte, les divers problèmes proposés. S'il éprouve d'abord quelque hésitation, il en sera bien dédommagé plus tard par l'habitude qu'il aura acquise d'analyser et de décomposer ses idées.

GÉOMÉTRIE

DESCRIPTIVE.

LIVRE PREMIER.

CHAPITRE PREMIER.

Notions préliminaires.

1. La **Géométrie descriptive** a principalement pour but de *décrire* les corps et de les *exécuter*.

2. On décrit un corps, lorsqu'au moyen d'une certaine combinaison de lignes et de points, on parvient à en exprimer toutes les dimensions.

3. Pour exécuter le corps que l'on a décrit, il faut déduire, du dessin que l'on a fait, les dimensions de ce corps, et reporter ces dimensions sur la matière dont il doit être composé.

4. Il y a deux manières d'exprimer les dimensions d'un corps que l'on se propose d'exécuter : l'une consiste à exprimer ces dimensions par des nombres, après avoir choisi une certaine unité ; l'autre consiste à dessiner le corps.

Mais il ne faut pas entendre par là que l'on doive le dessiner comme on le voit. Il suffit de jeter les yeux sur le premier

objet venu, pour s'apercevoir qu'on ne le voit pas dans ses véritables dimensions ; il est d'ailleurs facile de reconnaître que le plus petit déplacement, à droite ou à gauche, fait varier la forme sous laquelle nous apercevons cet objet. On peut conclure de là que nos yeux ne nous font voir que des formes apparentes, des formes relatives et qui dépendent, non-seulement de la grandeur véritable du corps que nous regardons, mais encore de la place d'où nous le regardons. C'est dans la Perspective que nous nous occuperons de cette espèce de dessin.

On voit, par ce qui vient d'être dit, que ce n'est qu'au moyen de conventions particulières que l'on peut parvenir à représenter par le dessin les véritables dimensions d'un corps.

Il est évident que la forme exacte d'un corps et sa grandeur seront parfaitement déterminées lorsque l'on connaîtra les positions relatives de tous les points qui composent ou terminent sa surface. On est donc conduit d'abord à chercher comment on peut déterminer la position d'un point.

5. Du point. L'espace n'ayant pas de limites, on ne peut déterminer la position d'un point qu'en le rapportant à des limites de convention.

6. De tous les moyens que l'on pourrait employer pour déterminer la position d'un point dans l'espace, un des plus simples est de donner la distance de ce point à trois plans choisis arbitrairement et connus de position.

Mais la méthode des projections permet souvent de n'employer que deux plans, et les constructions seront encore simplifiées, si l'on suppose ces deux plans perpendiculaires l'un à l'autre.

Ces plans sont nommés *plans de projection*.

Nous pourrons supposer que l'un soit horizontal et l'autre vertical.

7. Soit, **pl. 1, fig. 1,** un point M dont on veut déterminer la position dans l'espace. Concevons un plan horizontal ZAX, et un plan vertical ZAY.

Si du point M nous abaissons la ligne M*m* perpendiculaire

sur le plan horizontal, le pied m de cette perpendiculaire sera la *projection horizontale* du point M, et si l'on abaisse Mm', perpendiculaire sur le plan vertical ZAY, le point m' sera la *projection verticale* de M.

On voit que si l'on donnait les deux projections m, m', d'un point, ce point serait déterminé; car il est évident qu'il devrait se trouver à l'intersection des deux lignes mM, m'M menées perpendiculairement aux plans de projection. La droite Mm se nomme *projetante verticale* et la droite Mm' est une *projetante horizontale.*

8. Concevons maintenant que l'on fasse tourner le plan horizontal ZAX jusqu'à ce qu'il se trouve dans le prolongement du plan vertical; le point m viendra se placer dans le prolongement de la ligne pm' et au-dessous du point p, et la figure YZX, **fig. 2**, sera ce que l'on appelle une *Épure.*

La droite AZ représente l'*intersection des plans de projection.* Nous la désignerons par les deux lettres A et Z.

Les épures se font ordinairement sur du papier que l'on tend sur une planche bien plane et bien dressée ; quelquefois cependant les constructeurs font leurs épures sur des murs, sur des planches, ou sur la terre ; mais, dans tous les cas, les projections tracées sur une épure doivent être dessinées avec le plus grand soin.

9. Le plan qui contiendrait les deux droites Mm, Mm', serait évidemment perpendiculaire aux deux plans de projection, et par conséquent à leur intersection AZ ; de sorte que les lignes mp, $m'p$ deviennent le prolongement l'une de l'autre, lorsque l'on suppose le rabattement du plan horizontal ; d'où il résulte que sur l'épure *les deux projections d'un même point doivent toujours se trouver sur une même droite perpendiculaire à la ligne* AZ.

10. La *fig.* Mmp' étant un rectangle, on a M$m = m'p$ et M$m' = mp$.

Donc, *la distance de la projection horizontale d'un point à la ligne* AZ *est toujours égale à la distance de ce point au plan vertical de projection.*

11. *La distance de la projection verticale d'un point à la ligne* AZ *est toujours égale à la distance de ce point au plan horizontal de projection.*

12. Les lignes et les plans, considérés ici comme conceptions géométriques et comme moyens de solution de problèmes, doivent être regardés comme infinis. On doit se rappeler que, dans les figures de géométrie, on ne les termine par des points ou lignes qu'afin de faire sentir leur position, en attendant que l'on connaisse les moyens plus exacts fournis par la science que nous étudions.

La distance d'un point à un autre, le côté d'un triangle ou d'un polygone quelconque, doivent être regardés comme des portions de lignes droites; les faces d'un polyèdre, la surface d'un cercle, ne sont que des portions de plans. Il est évident, d'après cela, que les plans de projection étant infinis, partagent l'espace en quatre parties également infinies. Or, quelque grand que soit l'objet que l'on veut projeter, fût-ce un monument de la plus grande dimension, on conçoit que l'on peut toujours supposer le plan horizontal au-dessous des premières fondations, et le plan vertical de projection au delà des constructions les plus éloignées ; de sorte que l'on peut supposer tous les corps que l'on veut projeter placés au-dessus du plan horizontal et devant le plan vertical ; mais on verra par la suite que la nature des questions que l'on aura à résoudre exigera quelquefois que l'on sache déterminer la position d'un point situé derrière le plan vertical ou dessous le plan horizontal. Voyons ce qu'il faut faire pour cela.

13. Les plans de projection étant infinis, il est évident que lorsqu'on forme le rabattement de l'épure, la partie ZAX du plan horizontal, **fig. 3**, s'applique sur la partie inférieure ZAY′ du plan vertical, tandis que le prolongement ZAX′ du plan horizontal se relève et vient se placer derrière la partie supérieure du plan vertical. Il résulte de là que, sur une épure, l'espace qui est au-dessus de la ligne AZ représente en même temps la partie supérieure du plan vertical et le prolongement du plan horizontal, tandis que la portion de l'épure qui

est au-dessous de AZ représente le plan horizontal et la partie inférieure du plan vertical de projection.

14. Supposons actuellement qu'un point s'éloigne ou s'approche du plan horizontal. Il est évident qu'il aura toujours la même projection horizontale, et que la projection verticale seule s'éloignera ou s'approchera de la ligne AZ. Il est encore facile de voir que, tant que le point M, **fig. 4**, sera au-dessus du plan horizontal, sa projection verticale *m'* sera au-dessus de AZ, tandis qu'au contraire, quand ce point sera au-dessous du plan horizontal, sa projection verticale sera au-dessous de AZ ; et cette même projection serait sur AZ, si le point que l'on veut projeter était situé dans le plan horizontal même. Donc, *selon qu'un point dans l'espace sera au-dessus du plan horizontal, dans le plan horizontal ou au-dessous, la projection verticale de ce point sur l'épure sera au-dessus de la ligne* AZ, *sur la ligne* AZ *ou au-dessous.*

15. De même, *selon qu'un point dans l'espace sera en deçà du plan vertical, dans le plan vertical ou au delà, la projection horizontale de ce point sur l'épure sera au-dessous de la ligne* AZ, *sur cette même ligne ou au-dessus.* Car il est évident que, lorsque le point sera en deçà du plan vertical de projection, sa projection horizontale *n*, **fig. 5**, viendra, par le rabattement de l'épure, se placer au dessous de AZ, tandis que si le point N est au delà du plan vertical, sa projection horizontale *n* étant sur le prolongement du plan horizontal, viendra se placer, par le rabattement, dans la partie supérieure de l'épure.

16. La figure **6** représente toutes les positions d'un point par rapport aux plans de projection, savoir :

— *Au-dessus du plan horizontal et en deçà du plan vertical.*

— *Au-dessus du plan horizontal et au delà du plan vertical.*

— *Au-dessous du plan horizontal et en deçà du plan vertical.*

— *Au-dessous du plan horizontal et au delà du plan vertical.*

— *Situé dans le plan horizontal et en deçà du plan vertical.*

— *Situé dans le plan horizontal et au delà du plan vertical.*

— *Situé dans le plan vertical et au-dessus du plan horizontal.*

— *Situé dans le plan vertical et au-dessous du plan horizontal.*

— *Situé en même temps dans les deux plans de projection.*

17. De la ligne droite. Si par tous les points d'une droite MN, **fig. 7,** on conçoit des perpendiculaires au plan horizontal de projection,

La droite *mn*, qui passe par les pieds de toutes ces perpendiculaires, sera la projection horizontale de MN ; le plan qui contient toutes ces perpendiculaires se nomme *plan projetant.*

La projection verticale de MN est la droite *m'n'*, qui passe par les pieds de toutes les perpendiculaires abaissées des divers points de MN sur le plan vertical.

Deux points suffisant toujours pour déterminer la position d'une ligne droite, on peut dire que,

La projection d'une droite est la droite qui passe par les projections de deux points de la ligne projetée. Si l'on donnait les deux projections *mn*, *m'n'*, il est évident que la droite serait déterminée, car devant être en même temps dans les deux plans projetants *mn* MN, *m'n'*, MN, il est évident qu'elle ne peut être que leur intersection.

18. L'épure 9 représente les diverses positions qu'une droite peut prendre par rapport aux plans de projection, savoir :

— *Oblique aux deux plans de projection.*

— *Perpendiculaire au plan horizontal.*

— *Perpendiculaire au plan vertical.*

— *Perpendiculaire à la ligne* AZ.
— *Parallèle au plan horizontal.*
— *Parallèle au plan vertical.*
— *Parallèle aux deux plans de projection.*
— *Située dans le plan horizontal.*
— *Située dans le plan vertical.*
— *Située dans les deux plans de projection.*

19. Du plan. Si l'on conçoit dans l'espace un plan quelconque *pqs*, **fig. 10,** ce plan coupera les deux plans de projection suivant deux lignes *pq*, *qs*. Ce sont ces deux lignes que l'on est convenu d'adopter pour déterminer la position du plan.

On les nomme *traces du plan.*

La ligne *pq* est la trace verticale.

La ligne *qs* est la trace horizontale.

On voit qu'un plan sera connu et déterminé de position toutes les fois que l'on donnera ses traces : car on sait, en Géométrie, que, par deux lignes qui se coupent, on ne peut faire passer qu'un plan.

20. La figure **12** représente toutes les positions d'un plan par rapport aux plans de projection, savoir :

— *Oblique aux deux plans de projection.*
— *Perpendiculaire au plan horizontal.*
— *Perpendiculaire au plan vertical.*
— *Perpendiculaire aux deux plans de projection.*
— *Parallèle au plan horizontal.*
— *Parallèle au plan vertical.*
— *Parallèle à la ligne* AZ.
— *Contenant la ligne* AZ.

21. Il est quelquefois nécessaire de recourir à un troisième plan de projection. Ainsi, par exemple, lorsqu'une droite est perpendiculaire à AZ, ses deux projections étant toutes deux perpendiculaires à cette même ligne, n'en font, sur l'épure, qu'une seule, et la ligne donnée resterait indéterminée. Dans ce cas, il est nécessaire d'ajouter d'autres conditions, comme, par exemple, de déterminer les projections de deux points

de cette ligne, ou de la projeter sur un troisième plan de projection, que l'on prend souvent perpendiculaire aux deux autres, et que l'on rabat comme on fait pour le plan horizontal.

22. La figure **13, pl. 2,** représente un point M projeté sur trois plans de projection, et la figure **14** est le développement de l'épure. m, m', m'' sont les trois projections du point M ; pq, $p'q'$, $p''q''$ sont les trois projections d'une même droite, et As est la trace sur un plan auxiliaire Y'Z' d'un plan passant par la ligne AZ.

23. Notations. Avant de continuer nous allons exposer quelques considérations générales nécessaires pour l'intelligence de ce qui doit suivre.

La Géométrie descriptive peut être considérée comme une langue au moyen de laquelle on expose les relations qui existent entre les différentes parties de l'espace.

La Géométrie descriptive est la langue de l'ingénieur, c'est la langue dont il se sert lorsqu'il veut se faire comprendre des ouvriers ; et quoique ces derniers ne soient pas encore assez éclairés pour apprécier l'exactitude du langage géométrique, ils comprennent parfaitement les relations qui sont exprimées par une épure ; s'ils ne comprennent pas le langage parlé, s'ils ne comprennent pas le langage écrit, ce qui provient de ce que beaucoup d'entre eux n'ont pas les connaissances géométriques suffisantes, ils comprennent parfaitement en revanche le langage dessiné.

Mais, pour obtenir ce résultat, il faut apporter beaucoup de soin dans la disposition de l'épure et dans le choix des lignes destinées à relier entre elles toutes les parties du problème, de manière à faire reconnaître autant que possible l'ordre des opérations par lesquelles les quantités inconnues sont déduites des quantités données.

Je crois que c'est le but que l'on doit chercher à remplir dans un ouvrage destiné à familiariser le lecteur avec la solution graphique des problèmes, et j'ai toujours pensé que le *Traité de Géométrie descriptive* le plus parfait serait celui qui n'aurait pas besoin de texte, ou au moins dont le texte ne remplirait qu'une fonction secondaire.

Excepté pour l'explication des principes, le texte ne devrait être qu'une sorte de légende destinée à faire comprendre la décomposition de la question principale, et l'ordre dans lequel il faut exécuter les opérations particulières qui doivent concourir au résultat.

Je sais que cette opinion n'est pas entièrement partagée par quelques professeurs qui, pour mieux fixer l'attention des élèves sur les principes généraux, croient devoir écarter de leurs cours toutes les circonstances particulières que l'on rencontre dans la pratique.

Réduisant alors l'*épure* à sa plus simple expression, ils ne lui attribuent qu'un rôle analogue à celui que joue la *figure* dans la démonstration des théorèmes de la Géométrie élémentaire ; mais les personnes qui ont *appliqué* la Géométrie descriptive savent très-bien que la disposition de l'épure et le choix des plans des projections est la partie la plus essentielle de la solution des problèmes.

24. S'il n'est pas possible de faire un traité de Géométrie descriptive sans texte, il faut chercher au moins à en diminuer l'étendue en faisant concourir tous les moyens à la clarté des épures.

On atteindra en partie le but que je propose, par l'emploi d'une bonne notation, et je crois qu'il ne sera pas sans utilité d'entrer à cet égard dans quelques détails.

25. Intersection des plans de projection. Une épure n'est autre chose que le développement de l'angle dièdre formé par les plans de projection.

On suppose toujours que l'on a fait tourner un de ces deux plans autour de la droite suivant laquelle ils se coupent jusqu'à ce que les deux plans coïncident et ne forment plus qu'une seule surface sur laquelle on dessine.

Le rabattement dont nous venons de parler se fait donc autour de la droite, *intersection des deux plans de projection*, et Monge, dans son *Traité des principes*, n'a jamais nommé cette ligne autrement ; mais, pour éviter la répétition de cette longue phrase, il a constamment désigné la droite dont il s'agit par les deux lettres L et M, *et depuis la première page*

jusqu'à la dernière, il n'a jamais parlé de cette ligne autrement qu'en la nommant la droite LM.

Hachette, dans tous ses ouvrages sur la Géométrie descriptive, a toujours dit *la droite* AB, tandis que Lacroix n'a jamais désigné cette même ligne autrement que par les deux lettres XY.

Malgré les autorités que je viens de nommer, quelques personnes ont cru devoir donner le nom de *ligne de terre* à la droite suivant laquelle se coupent les deux plans de projection.

Il est assez probable que cela provient de l'usage dans lequel sont les architectes de considérer la ligne horizontale au dessus de laquelle ils dessinent ce qu'ils nomment une *élévation*, comme indiquant la surface du sol; mais il est évident que ce cas est beaucoup trop particulier pour motiver l'expression de ligne de terre comme désignation générale.

Ce qui est vrai pour un dessin représentant l'ensemble d'un monument cesse complétement d'être exact dans les épures de détail; et sans sortir des applications à l'architecture, je ferai remarquer que dans les épures de coupe de pierres, le plan horizontal de projection se trouve presque toujours *à la hauteur des naissances des voûtes*, tandis que dans les épures de charpente, cette même ligne se trouve à la hauteur des *sablières*, c'est-à-dire immédiatement au dessous du comble, et par conséquent *dans la partie la plus élevée du monument.*

Dans la perspective, le plan horizontal de projection est souvent pris *au dessus des monuments que l'on dessine.*

L'expression dont il s'agit ne peut donc se rapporter avec exactitude qu'à un très-petit nombre d'applications particulières, et manque essentiellement du caractère de généralité que l'on doit toujours chercher à introduire dans la démonstration des principes.

Au surplus, j'attacherais fort peu d'importance à cette dénomination si une longue expérience ne m'avait pas fait reconnaître qu'elle donne des idées fausses aux commençants. Confondant souvent dans leur esprit le plan horizontal avec la surface de la terre, ils ont de la peine à considérer les plans de projection d'une manière abstraite et comme des conceptions

géométriques, qui doivent rester entièrement au choix de celui qui opère ; de sorte que, préoccupés de cette pensée, que l'un des plans coordonnés doit nécessairement coïncider avec la surface du sol, ils comprennent difficilement que le plan horizontal de projection peut être pris à toutes les hauteurs.

L'expression que je critique offre d'ailleurs dans les applications d'autres inconvénients faciles à comprendre.

En effet, dans les grandes épures, il n'y a souvent qu'un seul plan horizontal, mais il y a presque toujours un assez grand nombre de plans verticaux de projection. Or, si dans une question composée il y avait, ce qui arrive fréquemment, cinq, six et quelquefois *vingt* plans de projection, il faudrait donc dire *la première*, *la seconde*, *la vingtième ligne de terre*, etc., ce qui jetterait une grande confusion dans le langage, tandis qu'il sera toujours facile de distinguer ces lignes par les expressions AZ, A'Z', A''Z'', etc.

Enfin, dans quelques problèmes où aucun des plans de projection n'est horizontal, il est évident que l'expression de ligne de terre ne signifierait plus rien.

Au surplus, les réflexions qui précèdent ne sont dictées par aucun désir d'innovation ; je ne pense pas qu'il soit utile de changer les expressions adoptées par l'usage ou de créer des expressions nouvelles, et pourvu que les *définitions soient exactes*, j'attache fort peu d'importance à une exactitude de mots que l'on n'obtiendra jamais.

Il y aurait d'ailleurs trop à faire si l'on voulait que les mots fussent toujours l'expression parfaitement exacte des idées, et dans ce cas il faudrait commencer par changer le nom même de la GÉOMÉTRIE, qui bien certainement n'a pas pour but principal de mesurer la terre, comme sembleraient l'indiquer les deux mots grecs qui composent ce nom.

Le mot de multiplication, appliqué au calcul des fractions, n'est pas plus exact que les mots carré et cube, employés en arithmétique pour exprimer la seconde ou la troisième puissance d'un nombre ; mais il s'agit ici d'expressions consacrées par l'usage universel, tandis que le nom de ligne de terre n'a jamais été employé que par un petit nombre d'auteurs.

D'ailleurs, en blâmant l'emploi de cette expression, je ne

prétends pas me mettre hors de cause, et je prendrai à mon compte une partie des critiques précédentes.

En effet, dans la première édition du *Traité* actuel, j'avais adopté ce même nom de ligne de terre sans y attacher d'abord une grande importance; mais lorsque j'ai vu la confusion que cela produisait dans l'esprit des commençants et dans l'explication des épures composées, je me suis empressé d'abandonner une expression qui n'a jamais été employée par Monge, Lacroix ni Hachette, et suivant leur exemple, j'ai constamment désigné par deux lettres la droite suivant laquelle se coupent les deux plans de projection.

Il serait sans doute à désirer que tout le monde s'accordât pour désigner cette droite par les mêmes lettres ; mais puisqu'elle a successivement été nommée LM par Monge, XY par Lacroix, AB par Hachette et LT par Ollivier, il ne peut y avoir aucun inconvénient à la nommer AZ ; et si l'on demandait à un élève ce qu'il entend par cette expression, il pourrait dire, comme Monge, que c'est *l'intersection des deux plans de projection*, tandis que le nom de *ligne de terre* sera toujours plus difficile à expliquer d'une manière satisfaisante.

Le choix des lettres A et Z est d'ailleurs motivé par la notation adoptée dans les applications de l'algèbre à la géométrie.

En effet, en exprimant par ZX le plan horizontal de projection et par ZY le plan vertical, il sera facile de transporter sur l'épure les résultats obtenus par le calcul algébrique, et réciproquement.

De plus, tout plan auxiliaire de projection, perpendiculaire à la ligne AZ, pourra être désigné par XY, et si l'on place la lettre A au point d'intersection des trois plans coordonnés, on aura établi une analogie complète entre les notations de la Géométrie descriptive et celle de l'Algèbre appliquée.

26. A toutes les raisons qui précèdent, je crois devoir en ajouter une qui me paraît décisive : c'est que la droite, que certaines personnes désignent par le nom de *ligne de terre*, n'indique jamais dans les épures la surface du terrain, mais *la trace du plan vertical de projection.*

En effet, les ingénieurs et les architectes, toutes les personnes enfin qui sont familiarisées avec les *applications* de la

Géométrie descriptive, savent très-bien que dans les études d'un projet il peut y avoir un grand nombre de profils, coupes ou élévations et par conséquent autant de plans verticaux de projections ; mais il n'y aura jamais qu'*un seul plan horizontal de projection*, quelle que soit la hauteur du sol par rapport au projet, ou du projet par rapport au sol. Toutes les coupes horizontales d'un monument ou d'une maison pourront différer entre elles suivant l'étage dont elles expriment la distribution intérieure, mais elles ne dépendront pas de la hauteur *du plan horizontal sur lequel on les aura projetées.*

Il est bien certain que dans les études d'un canal, d'une route ou d'un chemin de fer, dans le profil d'une galerie souterraine, la ligne AZ ne représente pas la surface de la terre, qui n'est presque jamais de niveau, ni dans le projet ni dans le terrain naturel. Je conçois que dans les écoles préparatoires, où l'on fait très-peu d'épures, les jeunes gens s'habituent à regarder le tableau devant lequel ils sont toute la journée comme le *plan principal de projection* ; et, dans ce cas, il est naturel qu'ils cherchent à exprimer sur ce premier plan quelle est la hauteur du second : mais s'ils connaissaient le but de la Géométrie descriptive, ils comprendraient que dans une question composée de construction ou d'architecture, tout se rapporte à la projection horizontale ou *plan d'ensemble,* et que les nombreux profils, coupes ou détails nécessaires pour l'exécution du projet ne sont que des projections secondaires, rabattues en tournant autour de lignes qui sont souvent situées à toutes les hauteurs, et qui, par conséquent, n'ont rien de commun avec la terre.

27. Le mot de *ligne de terre* conviendrait tout au plus pour désigner la hauteur du sol sur un dessin isolé, qui ne contiendrait que la projection verticale ou *élévation* d'un monument ou d'une machine ; mais dès que l'on réunit sur une même feuille les deux projections d'un objet, c'est le plan horizontal qui est la projection essentielle, et la ligne AZ est par conséquent *la trace horizontale* du plan vertical de projection.

28. Je pense même qu'il serait convenable, dans les grandes épures, de désigner cette droite par A'Z'. En effet, le plan horizontal étant, comme nous l'avons dit plus haut, le plan principal de projection, on nommerait A'Z' la trace du plan vertical sur lequel les projections sont désignées par des *primes'* ; A''Z'' serait la trace du plan vertical sur lequel les projections sont accentuées par des *secondes''*; A'''Z''' serait la trace du plan vertical sur lequel les points sont accentués par des *tierces'''*, et ainsi de suite. Cette notation, dont je fais souvent usage, me paraît extrêmement commode.

29. Notation des points et des lignes. La plus grande difficulté que l'on rencontre dans la notation des grandes épures de Géométrie descriptive provient de ce que les points que l'on veut désigner sont souvent si nombreux, si rapprochés les uns des autres et entourés par un si grand nombre de lignes d'opérations, qu'il ne reste plus assez de place pour écrire les lettres qui doivent faire reconnaître ces points.

Cette difficulté n'est presque jamais sensible dans les études élémentaires, parce que les épures destinées à la démonstration des principes généraux sont ordinairement peu chargées de lignes et de points ; mais lorsqu'on arrive aux applications, il n'en est plus de même, et c'est alors que les inconvénients dont nous venons de parler, se faisant vivement sentir, on regrette de ne pas avoir adopté dès l'origine une notation plus convenable.

Mais quand on parviendrait à trouver une notation parfaite, il serait sans doute très-difficile de la faire adopter ; car il faudrait pour cela que l'on abandonnât toutes celles qui sont en usage, ce que je ne proposerai même pas.

Je me contenterai d'indiquer quelques modifications qui, je crois, suffiront pour faire disparaître une grande partie des inconvénients que j'ai signalés plus haut.

Je ferai remarquer d'abord qu'il n'est nullement nécessaire que chacune des projections d'une même droite soit désignée par deux lettres.

Une seule, placée à l'endroit où la ligne prolongée rencontre le cadre de l'épure, suffira pour faire retrouver la

droite dont on parle, beaucoup plus facilement qu'on ne peut le faire avec deux lettres, qu'il faut souvent chercher longtemps au milieu du réseau formé par le nombre considérable de lignes qui concourent à la solution de certains problèmes composés. (*Voir les planches* 15, 17 et 18.)

Cette méthode, que j'ai souvent employée, a l'avantage de diminuer le nombre de lettres nécessaires, et cet avantage est d'autant plus grand que l'on éprouve quelquefois beaucoup de difficulté pour trouver autant de lettres que l'on a de lignes ou de points à désigner, et que l'on est souvent obligé d'employer les chiffres pour indiquer un grand nombre de ces points.

Ce qui précède étant admis, voyons s'il n'y aurait pas moyen d'introduire quelque régularité dans le choix des lettres.

Monge, et par suite Hachette, dans leurs *Traités*, ont à peu près constamment désigné par une lettre capitale la projection horizontale de chaque point, et par la petite lettre correspondante la projection verticale du même point.

Cette notation assez simple aurait toujours le défaut d'embarrasser par des grandes lettres la projection horizontale de l'épure, et cet inconvénient est d'autant plus grave dans les applications, que plusieurs projections verticales se rapportant souvent à une seule projection horizontale, cette partie de l'épure est presque toujours la plus chargée de lignes.

C'est ce que Hachette paraît avoir reconnu, puisque dans quelques-unes de ses épures, et principalement dans celles qui se rapportent aux applications, il a repris l'usage des petites lettres pour les deux projections.

D'ailleurs il est souvent nécessaire, pour démontrer un principe ou pour faire comprendre la décomposition d'une question principale, de faire une figure de géométrie ordinaire ; et l'usage adopté généralement dans ce cas, étant d'employer les lettres capitales, on ne pourrait plus, dans le texte, désigner suffisamment les points A ou B de l'espace, si leurs projections horizontales étaient indiquées de la même manière sur l'épure.

Ces considérations paraissent avoir déterminé la notation

adoptée par Lacroix, qui, réservant les lettres A, B, C, etc., pour désigner les points de l'espace, exprime leur projection horizontale par A′, B′, C′, et les projections verticales correspondantes par A″, B″, C″.

Cette notation serait peut-être préférable à celle de Monge et de Hachette ; mais outre l'inconvénient de placer des accents sur la projection horizontale qui est souvent embarrassée par un si grand nombre de lignes, il est évident qu'il sera toujours plus facile de trouver la place pour une petite lettre que pour une lettre capitale.

Je crois donc qu'une partie des difficultés que je viens de signaler serait évitée par la notation suivante adoptée par beaucoup de professeurs :

Points ou lignes de l'espace.	A, B, C, D,
Projections horizontales des mêmes points.	*a*, *b*, *c*, *d*,
Projections verticales	*a′*, *b′*, *c′*, *d′*.

Souvent aussi dans le texte, on pourra désigner les points ou lignes de l'espace par *aa′*, *bb′*, *cc′*, etc.

La confusion entre les lignes et les points ne sera jamais possible si, comme je le propose ici, la lettre indiquant la projection d'un point est placée sur l'épure, tout auprès de cette projection, tandis que la lettre employée pour désigner une ligne serait placée au bord de l'épure, au point où la projection de cette ligne prolongée vient couper le cadre.

Souvent dans la pratique, lorsqu'il n'est pas nécessaire de conserver la notation et qu'elle n'est utile que pour éviter la confusion pendant l'exécution du travail graphique, on peut se contenter d'écrire au crayon la lettre en dehors du cadre et de la faire disparaître avec la gomme aussitôt que l'épure est terminée.

En jetant un coup d'œil rapide au bord du cadre, on retrouve de suite la ligne dont on a besoin, et il est facile alors de suivre cette ligne dans toutes les parties de l'épure, quelle que soit la confusion qui pourrait provenir du grand nombre de points ou de lignes projetées.

On peut encore simplifier la notation en employant le moyen

que je vais indiquer, et qui m'a été fort utile dans quelques épures très-composées.

On écrira l'alphabet sur un morceau de papier en disposant les lettres de la manière suivante :

a c e i m n o r s t u v x z
b d f g h j k l p q y.

Les lettres de la première ligne étant moins embarrassantes pourront être employées de préférence pour désigner les points situés dans les parties de l'épure qui seront très-chargées tandis que les autres lettres seront plus particulièrement affectées à la notation des lignes prolongées jusqu'au bord du cadre.

30. Projections auxiliaires. Nous n'avons parlé au commencement de ce chapitre que des deux plans de projection, vertical et horizontal, quoiqu'il arrive quelquefois que tous les deux sont verticaux ou inclinés dans l'espace.

Ces deux plans suffisent presque toujours pour résoudre les questions élémentaires ou pour la démonstration des principes ; mais, dans les questions composées, il sera souvent nécessaire d'introduire un assez grand nombre de plans auxiliaires de projection.

Or, de quelque manière que soient placés ces plans, on pourra toujours, en exprimant, comme nous en sommes convenus, chaque point de l'espace par une lettre capitale, désigner ses diverses projections par la petite lettre correspondante, accentuée de manière à indiquer l'ordre des nouveaux plans de projection successivement introduits.

Ainsi, on aurait

Points ou lignes de l'espace. . . .	A,	B,	C,	D,	E
Projection horizontale.	a,	b,	c,	d,	e
Projection verticale	a',	b',	c',	d',	e'
Première projection auxiliaire. . .	a'',	b'',	c'',	d'',	e''
Deuxième projection auxiliaire. .	a''',	b''',	c''',	d''',	e'''

et ainsi de suite, quel que soit le nombre des plans sur lesquels un point ou une ligne auront été projetés.

Ce mode de notation permettra, surtout dans les opérations de rabattement, de suivre par la pensée les lignes et les points dans toutes les positions qu'il faut leur faire occuper dans l'espace pour arriver à la solution complète du problème.

Les notations que nous venons d'indiquer ne seront employées que pour désigner les points et les lignes droites : pour les courbes dont la construction exige un grand nombre de points, il sera plus commode d'employer des chiffres accentués également, de manière à indiquer autant que possible l'ordre des opérations successives.

On pourra encore employer les chiffres dans les questions où il faudra désigner un grand nombre de points, comme, par exemple, dans les projections de polyèdres qui auraient beaucoup de sommets, dans les épures de coupe des pierres et d'assemblages de charpente, où les polygones formés par les pénétrations mutuelles des pièces de bois ont souvent un si grand nombre de côtés; enfin on peut également désigner par des chiffres les génératrices de surface ou les divers systèmes de lignes que l'on est souvent obligé de tracer pour arriver à la solution des problèmes, telles, par exemple, que les rayons de lumière dans la théorie des ombres, ou les rayons visuels dans la perspective, etc.

Lorsque l'on aura épuisé l'alphabet ordinaire, il faudra bien trouver quelque autre notation pour indiquer les parties essentielles de l'épure.

Ainsi, on peut employer l'alphabet grec, mais la forme de ces caractères, avec lesquels beaucoup de personnes et surtout les ouvriers sont peu familiarisés, m'engagera toujours à en restreindre l'usage.

Je préfère les lettres capitales, et quoique nous ayons réservé ces lettres pour désigner les points ou les lignes de l'espace, je crois que l'on se priverait volontairement d'une ressource précieuse si l'on considérait cette convention comme absolue, et l'on pourra, sans inconvénient, introduire les lettres capitales dans certaines épures composées.

Ainsi, par exemple, nous avons adopté les deux lettres A et Z pour l'intersection des plans coordonnés principaux ; nous consacrerons également les lettres YX et YZ pour les plans auxiliaires de projection.

Enfin, les lettres E, F, D, G, H, etc., pourront être employées avec avantage pour désigner quelques-unes des parties principales de l'épure, comme, par exemple, la base ou la section droite d'un prisme, la projection tout entière de ce prisme, celle d'un cylindre, d'un cône ou d'une sphère, le développement d'une surface ou la courbe tout entière provenant de la section d'une surface par un plan ou de la pénétration de deux surfaces, etc.

31. Quelques personnes peu familiarisées avec les applications de la Géométrie descriptive croient simplifier l'étude de cette science en cherchant à ramener tout à un seul principe. Il y a des professeurs qui hésitent à employer des plans auxiliaires et voudraient, s'il était possible, n'employer qu'un seul plan de projection.

On parviendrait peut-être, en suivant cette voie, à créer une Géométrie descriptive de fantaisie qui pourrait donner lieu à des questions amusantes d'école ou d'examen; mais on aurait alors une science qui ne servirait à rien.

C'est en modifiant les méthodes dans chaque cas, suivant les circonstances particulières, que l'on devient habile praticien; lorsqu'on veut ramener toutes les opérations à une méthode générale et unique, on agit comme un ouvrier qui voudrait exécuter tout avec un seul outil. Peut-être, avec beaucoup de temps et de patience, parviendrait-il à faire un travail remarquable, mais il emploierait dix fois plus de temps et ne ferait pas mieux.

Celui qui veut remplacer les deux plans de projection de la Géométrie descriptive par un seul ressemble à un menuisier qui, ayant une scie et un rabot, trouverait que deux outils sont trop embarrassants, et jetterait la scie prétendant qu'avec son rabot il pourra très-bien réduire sa planche à la largeur ou à la longueur qu'il lui conviendra.

Non-seulement les deux plans de projection sont plus utiles et infiniment plus commodes qu'un seul, mais celui qui voudrait se borner aux deux projections principales d'un corps un peu composé ne pourrait presque rien faire en applications.

La construction d'un grand monument exige les plans

d'ensemble, les plans de tous les étages, des élévations, des profils, des coupes dans tous les sens; les plans de projection particulièrement utiles aux tailleurs de pierres, aux charpentiers, aux serruriers ; les développements et rabattements de toute espèce qui sont autant de plans de projection différents; et tout cela est infiniment plus simple que *deux* et surtout *qu'une seule projection.*

La question la plus composée se réduit presque à rien lorsqu'on sait la décomposer, et c'est ce que l'on fait en Géométrie descriptive en employant des projections particulières pour chaque partie de la question principale, de même que dans les applications de l'Algèbre on emploiera une formule particulière pour chaque cas particulier.

Enfin, lorsque l'on est embarrassé pour comprendre une épure sur laquelle il y a deux plans de projection, il faut en introduire de nouveaux pour dégager les parties du dessin où les lignes sont trop nombreuses ou trop rapprochées; et si l'on trouve que deux projections sont plus difficiles à comprendre qu'une seule, il faut renoncer à la Géométrie descriptive ou du moins à ses applications.

32. Notation des plans. Nous n'avons rien dit encore des plans, pour lesquels nous adopterons une notation exceptionnelle.

En effet, le plan, dans la Géométrie descriptive, possède un caractère qui lui est essentiellement particulier. *On détermine* la position d'un plan, mais on *ne le projette pas.*

Les traces ne sont pas des projections.

Les traces font partie du plan auquel elles appartiennent et dans lequel elles sont situées, tandis que les projections des lignes et des points ne font partie ni de ces points ni de ces lignes.

Le plan est l'élément essentiel de la Géométrie descriptive, comme l'équation est l'élément essentiel de l'Algèbre ; c'est par les intersections des plans que l'on détermine les points et les lignes dans la Géométrie descriptive, comme dans l'Algèbre c'est en combinant des équations que l'on parvient à trouver les quantités inconnues.

Enfin les plans, dans la Géométrie descriptive, comme les équations dans l'Algèbre, ne sont que des *instruments* ou, si l'on veut, des *formules* qui, par leur combinaison, servent à trouver la solution des problèmes. C'est pourquoi je n'ai donc pas cru devoir étendre au plan la notation que j'ai indiquée plus haut pour les points et les lignes.

Dans les éditions précédentes, j'ai désigné tous les plans par la lettre p, en les distinguant seulement par des accents qui indiquent l'ordre suivant lequel chacun d'eux est tracé sur l'épure.

Je continuerai à suivre la même méthode; mais pour établir une différence encore plus sensible entre la notation des plans et celle des points ou des lignes, je remplacerai sur les planches ajoutées à l'édition actuelle la lettre p par P et les accents par des chiffres placés à droite et au bas de la lettre P.

Chacun de ces chiffres indiquera l'ordre suivant lequel le plan correspondant sera venu participer à la solution du problème.

Ainsi les plans successivement employés seront désignés par $P_1 P_2 P_3$ etc. *(Voir la fig.* 6, *pl.* 17.)

Cette convention, en permettant d'exprimer tous les plans par une seule lettre, augmentera le nombre de celles qui resteront disponibles pour désigner les autres parties de l'épure.

Les chiffres placés au bas et à droite de la lettre P seront moins embarrassants que les accents $'$, $''$, $'''$, etc. Ainsi P_{38} est évidemment beaucoup plus simple que $P^{XXXVIII}$.

Les traces verticale et horizontale d'un plan sont toujours faciles à distinguer par la partie de l'épure sur laquelle elles sont situées, et les ponctuations adoptées feront suffisamment reconnaître celles de ces traces qui sont prolongées au delà du plan de projection au quel elles se rapportent.

33. Aux considérations qui précèdent, j'ajouterai quelques détails qui sont souvent très-commodes dans l'exécution d'une grande épure.

Ainsi, en écrivant *a-c* au crayon sur le bord du cadre, on pourra désigner la droite qui est déterminée par les deux points *a* et *c*. On pourra nommer $P_1 P_2$ la droite qui résulte de l'intersection des plans P_1 et P_2.

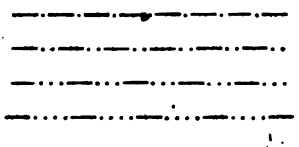
On pourrait aussi exprimer par *d-h* le point résultant de l'intersection des droites *d* et *h* ; par *b*-P, le point suivant lequel la droite *b* perce le plan P ; par P-*bh*, P-*bd*, P-*hd*, les plans déterminés par les droites *b* et *h*, *b* et *d*, *h* et *d* ;

Par P-*acu*, P-*cmn*, les plans déterminés par les trois points *a*, *c*, *u* ou *c*, *m*, *n* ; par P-*ab*, le plan qui contient le point *a* et la droite *b*, etc.

Mais toutes ces notations composées de plusieurs lettres ne doivent être placées qu'au bord du cadre et pendant l'exécution du travail graphique, après quoi on les fait disparaître pour les remplacer par une seule lettre, si toutefois, après l'épure terminée, il est nécessaire de conserver la notation ; car il ne faut pas oublier que le principal inconvénient des notations proposées jusqu'ici consiste surtout dans la difficulté de placer un grand nombre de lettres au milieu des épures, et que, par conséquent, *au lieu de chercher à multiplier ces lettres, on doit faire tout ce qui est possible pour en diminuer le nombre.*

34. Des différentes espèces de tracé. On peut encore tirer un parti fort utile des différentes manières de tracer les lignes sur les épures.

Ainsi, indépendamment des lignes en points ronds ou en points allongés, on pourra, comme cela est admis par l'usage, employer des ponctuations mixtes, telles que celles qui suivent:



De sorte que le nombre de points ronds placés entre deux points allongés consécutifs désignerait certaines lignes ou certains systèmes de lignes satisfaisant à des conditions particulières ; et cela suffirait, dans un grand nombre de cas, pour indiquer l'ordre des opérations successives nécessaires pour résoudre la question proposée.

Au surplus, j'espère que l'application des conventions qui

précèdent ne laissera dans l'esprit du lecteur aucun doute sur l'avantage qui peut en résulter.

35. Exécution des épures. Il faut admettre d'abord qu'il y a trois sortes d'épures, savoir :

1° *Les épures de principe ;*
2° *Les épures d'étude ;*
3° *Les épures d'application.*

Les épures de principe ne doivent contenir qu'un très-petit nombre de lignes ; ainsi, par exemple, s'il s'agit de la construction d'une courbe, on ne conservera que les opérations nécessaires pour expliquer la méthode générale par laquelle on peut obtenir un point quelconque de cette courbe, ou les abréviations résultant de la position exceptionnelle de quelques-uns des points cherchés.

36. Les épures d'application doivent être encore plus simples que les épures de principe, car elles ne doivent contenir que les données et les résultats, sans qu'il soit nécessaire d'y conserver les lignes d'opération.

37. Si les épures de principe et les épures d'application doivent contenir très-peu de lignes, il n'en doit pas être de même des épures d'étude. En effet, indépendamment des données et des résultats, elles doivent conserver toutes les lignes nécessaires pour rappeler les principes, souvent nombreux, par lesquels on a déterminé les diverses parties des lignes obtenues.

Il est bien entendu qu'il ne s'agit pas ici de la répétition fastidieuse d'une même opération exécutée autant de fois qu'il y a de points à obtenir ; mais, dans la construction d'une grande courbe, il arrivera souvent que sur vingt points, chacun aura un caractère individuel qui permettra de déterminer sa position par une méthode particulière, plus simple que la méthode générale, et toutes ces abréviations doivent être indiquées sur une *épure d'étude.*

38. Indépendamment des lignes nécessaires pour rattacher les données aux résultats obtenus, et pour indiquer les méthodes diverses qui ont été appliquées dans chaque cas, il faut encore qu'une épure d'étude contienne quelques-unes des vérifications les plus importantes.

Ainsi, un point obtenu doit être vérifié de toutes les manières possibles, et si une seule vérification est suffisante dans la pratique, il n'en est pas de même lorsqu'on étudie. En effet, chaque méthode employée pour vérifier la position d'un point est évidemment une manière différente de l'obtenir ; et par ce travail, on se rend habile à voir de suite, au moment de l'application, quel est le moyen le plus simple pour déterminer la position du point cherché. On peut se contenter de conserver sur l'épure les vérifications les plus importantes, mais on ne saurait en faire un trop grand nombre au crayon.

Il ne faut pas croire, au surplus, que toutes ces lignes produisent autant de confusion que le pensent ordinairement les personnes qui espèrent étudier la Géométrie descriptive sans faire d'épures, ce qui est absolument comme si elles voulaient apprendre l'Algèbre sans résoudre une seule équation.

Mais lorsqu'au lieu de se contenter de notions abstraites, et par conséquent un peu confuses, on aborde franchement l'exécution du travail graphique, on parvient très-promptement à regarder sans aucune fatigue toutes les lignes tracées sur l'épure la plus chargée ; et quel que soit le nombre de ces lignes, *on ne voit alors* que le petit nombre de celles qui se rattachent à la partie de la question que l'on considère momentanément.

Enfin, pour celui qui sait la Géométrie descriptive, une épure dont toutes les parties sont liées entre elles est beaucoup plus facile à comprendre que celle dont on aurait supprimé les lignes d'opération.

39. Ce n'est pas d'ailleurs le grand nombre de lignes qui rend une épure confuse, mais la disposition souvent maladroite des rabattements ou des plans auxiliaires de projection. Si l'on rabat une projection auxiliaire sur une partie de l'épure

où il existe déjà une projection ou un rabattement précédent, on rendra certainement l'épure très-confuse.

Cela cependant se fait souvent dans la pratique ; ainsi, dans les grandes épures de charpente ou de coupe de pierres qui doivent être tracées à l'échelle d'exécution, on n'a pas toujours l'espace suffisant pour isoler toutes les figures développées ou rabattues, mais, dans ce cas, il n'y a pas le même inconvénient que dans les épures d'étude :

1° Parce que celui qui exécute le travail *n'étudie pas la question*, qu'il connaît parfaitement par les études préliminaires qu'il a dû faire chez lui, à une petite échelle, avant de les répéter en grand sur le chantier ;

2° Parce que dans les *épures d'application* on ne conserve que ce qui est absolument indispensable pour tracer sur les matériaux les lignes qui doivent diriger le travail des ouvriers ;

3° Parce qu'enfin, on peut tracer avec des couleurs différentes les parties de l'épure qui ne doivent pas être confondues, quoique superposées. Mais lorsqu'on étudie, et surtout lorsqu'on exécute le dessin à une échelle réduite, il faut éviter avec soin cette superposition, qui ne permettrait pas de conserver les lignes nécessaires pour rattacher les résultats aux données, et rappeler les principes que l'on a dû appliquer pour exécuter les diverses parties de l'épure.

40. Quant au temps nécessaire pour l'exécution du travail graphique, il n'est pas aussi considérable qu'on pourrait le croire au premier abord.

Ce serait sans doute un travail fort long de dessiner en imitant la gravure une grande épure de Géométrie descriptive ; cela tient à l'obligation de distinguer les diverses sortes de lignes par des points de différentes sortes. Mais cette perte énorme de temps peut être facilement épargnée en indiquant toutes les lignes d'opérations par des *encres de couleur*. Or, une épure en encre de couleur n'exige pas beaucoup plus de temps que si elle était entièrement dessinée au crayon, et celui qui comprend bien la question à résoudre n'emploiera certainement pas plus de deux ou trois heures pour tracer

l'épure la plus composée. On peut d'ailleurs dégager l'épure, en supprimant une partie des lignes d'opération, dont on ne conserve que les *attaches* ou *amorces*, ce qui suffit pour indiquer les points dont la recherche peut offrir quelque intérêt.

Les considérations précédentes étant admises, nous allons revenir à l'étude des principes.

41. Génération du plan. Le plan étant l'élément géométrique dont nous ferons le plan d'usage, il est de la plus grande importance d'en bien étudier toutes les propriétés.

42. On peut toujours supposer qu'une surface est engendrée par le mouvement d'une ligne dont la définition est donnée, et qui se meut suivant certaines conditions.

On dit qu'une ligne engendre une surface lorsque, par suite de son mouvement, elle occupe successivement tous les points de cette surface.

43. D'après cela, si l'on conçoit deux lignes droites qui se coupent et si l'on suppose que l'une d'elles, restant immobile, la seconde se meut parallèlement à elle-même, de manière à couper toujours la première, la droite mobile, par son mouvement, engendre un plan.

On dit qu'une droite se meut parallèlement à elle-même lorsque toutes ses positions sont parallèles entre elles.

La droite mobile sera nommée *génératrice du plan;* la droite sur laquelle elle s'appuie se nomme *la directrice*, et le point où les deux lignes se coupent se nomme *le pied de la génératrice.*

44. On peut prendre pour génératrice et directrice d'un plan deux lignes quelconques de ce plan ; mais il est presque toujours plus simple de prendre l'une des traces pour génératrice et l'autre pour directrice. Cela étant admis :

45. *On propose de construire pour toutes ses positions les projections de la génératrice d'un plan.*

Soit, **fig. 15**, le plan P*d*G dont on veut représenter la génération. Supposons que la trace horizontale G*d*, prise pour génératrice, prenne successivement toutes les positions marquées G*d* ; comme elle restera parallèle à elle-même, et par conséquent au plan horizontal, sa projection verticale *g'd'* sera toujours parallèle à la ligne AZ. La trace verticale servant de directrice, le point *d'*, pied de la génératrice, fait partie du plan vertical de projection, et sa projection horizontale sera sur AZ. Enfin, toutes les positions de la ligne G*d* devant être parallèles entre elles, leurs plans projetants verticaux seront parallèles et, par conséquent, toutes les projections horizontales *gd* seront parallèles entre elles et à la trace horizontale G*d* du plan donné.

46. Quand la génératrice descend au-dessous du plan horizontal, sa projection verticale *g''d''* doit être au-dessous de la ligne AZ.

47. Le plan étant infini (12), toutes ses génératrices seront infinies, de sorte qu'en traçant les prolongements de ces lignes, on représentera sur l'épure les parties du plan donné qui se trouvent au delà du plan de projection. Cependant, pour ne pas embarrasser les épures, on ne construit ces prolongements qu'au moment où ils deviennent nécessaires pour la solution de la question dont on s'occupe.

La figure **16** représente la construction, sur l'épure, de toutes les positions de la génératrice horizontale d'un plan P*d*G. Ainsi, en général,

Si l'on veut construire une des positions de la génératrice horizontale d'un plan, on construira parallèlement a la trace horizontale une ligne gd, *qui sera la projection horizontale de la génératrice. On mènera la ligne* dd' *perpendiculaire à la ligne* AZ, *et le point* d', *où cette ligne rencontrera la trace verticale, sera le pied de la génératrice. Enfin la ligne* d'g', *menée par le point* d' *parallèlement à la ligne* AZ, *sera la projection verticale de la génératrice demandée.*

On pourrait commencer par construire la projection verticale *g'd'*.

48. Les figures **17** et **18** représentent la génération d'un plan pour lequel on a employé, comme génératrice, une droite parallèle à la trace verticale. On voit que, dans ce cas, toutes les projections horizontales de la génératrice sont parallèles à la ligne AZ, et toutes les projections verticales sont parallèles à la trace verticale. On en conclut que,

Si l'on veut construire une des positions de la génératrice parallèle à la trace verticale, on construira, **fig. 18,** *une ligne* g'd' *parallèle à cette trace ; on mènera* d'd *perpendiculaire à la ligne* AZ, *ce qui donnera en* d *le pied de la génératrice. Enfin* dg, *menée parallèlement à la ligne* AZ, *sera la projection horizontale de cette génératrice.*

Je recommande au lecteur les deux épures précédentes comme très-essentielles. Il faut, après les avoir bien comprises, en faire l'application à toutes sortes de plans, variés de toutes les manières quant à la position. Les figures **19, 20, 21** représentent quelques générations de plans. Dans la figure **20**, on a pris pour directrice la trace sur le plan auxiliaire de projection Y'Z'. Dans la figure **21**, on a pris pour génératrice une ligne oblique aux plans de projection.

49. J'engage les commençants, pour fixer leurs idées et se familiariser avec les diverses dispositions des points, des plans et des lignes dans l'espace, à tailler deux cartes et à les placer à angle droit, de manière qu'elles puissent figurer les deux plans de projection ; puis, après avoir tracé sur ces cartes des projections de points ou des traces de plans, ils feront le développement de l'épure, afin de s'habituer à juger de la position d'un point ou d'une ligne par ses projections, et réciproquement. Mais je leur conseille en même temps de faire tous leurs efforts pour se mettre le plus promptement possible en état de se passer de ces moyens, qui ne doivent être employés que pour les premières leçons, et qui même, si l'on en faisait usage trop longtemps, deviendraient un obstacle au développement de l'esprit d'analyse et de généralité nécessaire pour bien concevoir les principes de la Géométrie descriptive.

CHAPITRE II.

Du point, de la ligne droite et du plan.

PROBLÈMES.

50 *Faire passer une ligne droite par un point dont on a les projections.*

Lorsque l'on projette une droite MN, **fig. 22, pl. 3,** le plan projetant MN*mn*, contenant toutes les perpendiculaires abaissées des différents points de cette droite sur le plan de projection, sa trace *mn*, ou autrement la projection de la droite, doit contenir la projection de chacun des points de cette droite. Ainsi, **fig. 23,** pour exprimer qu'une droite située dans l'espace contient un certain point A, il suffit de faire passer les projections de la droite par celles du point. On conçoit que cette question est indéterminée, c'est-à-dire que l'on peut construire une infinité de droites qui passent par un point donné. Ainsi, **fig. 24**, l'une quelconque des lignes qui passent par la projection horizontale *a* d'un point, avec l'une de celles qui passent par sa projection verticale *a'*, peuvent toujours être considérées comme les deux projections d'une droite passant sur ce point.

Réciproquement, et par la même raison, si l'on voulait exprimer qu'un point est sur une droite, il faudrait placer les projections du point sur celles de la droite, et sur une même perpendiculaire à la ligne AZ (9). Il résulte encore de ce que

nous venons de dire, que le point a,a', **fig. 25**, ne fait pas partie de la droite mn, $m'n'$.

51. Si l'on voulait *faire passer une droite par deux points*, il est évident, d'après ce qui vient d'être dit, qu'il faudrait faire passer les projections de la droite par les projections des deux points.

52. *Trouver la distance de deux points.* Après avoir joint ces deux points par une droite, il ne restera plus qu'à obtenir la grandeur de cette droite. Or, si nous représentons la droite donnée par MN, **fig. 26**, et le plan de projection par PQ, il est facile de voir qu'en général la droite MN sera plus longue que sa projection mn; mais si par le point N, on mène la droite No, parallèle au plan de projection, et par conséquent égale à la projection de la ligne donnée, on pourra reconnaître qu'en général une ligne droite située comme on voudra dans l'espace, est l'hypoténuse d'un triangle rectangle MoN, dans lequel un des côtés No de l'angle droit est égal à la projection de la droite, et l'autre côté Mo est égal à la différence qui existe entre les distances Mm, Nn des extrémités de cette droite au plan sur lequel elle a été projetée. Il résulte de là, que pour avoir la longueur d'une droite, il suffira de construire, dans ses véritables dimensions, le triangle rectangle dont elle est l'hypoténuse. Pour cela,

Soit, **fig. 27**, mn $m'n'$, les projections de la droite dont on veut avoir la longueur. On fera, **fig. 28**, l'angle droit BAC, on portera sur AC, de A en N, la projection horizontale mn, on portera pareillement sur AB, de A en M, la ligne $m'o$, égale à la différence entre les perpendiculaires $m'p$, $n'q$, qui représentent les distances des points m' et n' à la ligne AZ ou au plan horizontal, et l'hypoténuse MN sera la grandeur de la droite donnée.

On peut faire la construction avec plus de simplicité, en opérant de la manière suivante. On mènera par le point n' la ligne $n'o$ parallèle à la ligne AZ, et par cette construction, on aura déterminé l'angle en o, et la différence $m'o$ des hauteurs des extrémités de la droite, de sorte que, pour achever le

triangle, il n'y aura plus qu'à prendre avec le compas la grandeur de la projection horizontale *mn*; puis après l'avoir portée de *o* en N, l'hypoténuse *m*'N sera la longueur de la droite donnée.

53. On peut encore expliquer, d'une autre manière, la construction précédente.

Soit *mn*, *m'n'*, **fig. 29**, les projections de la droite dont on cherche la longueur.

Supposons que cette droite tourne autour de la verticale projetante du point M, en conservant toujours la même inclinaison, par rapport à cette ligne. Le point *n'n'* décrira un arc de cercle horizontal. Cet arc étant parallèle au plan horizontal, aura pour sa projection sur ce plan l'arc *nn''*, et sa projection verticale *n*'N sera parallèle à la ligne AZ. Or si nous arrêtons le mouvement de la droite au moment où sa projection horizontale aura pris la position *mn''*, la projection verticale correspondante *m*'N sera la longueur cherchée, car la droite étant alors parallèle au plan vertical, il est facile de concevoir qu'elle sera projetée sur ce plan suivant sa grandeur.

On aurait pu faire tourner la droite autour de l'horizontale projetante du point *m*, *m'*, jusqu'à ce que sa projection verticale fût devenue *m'n'''* ; alors elle aurait été parallèle au plan horizontal, et sa nouvelle projection horizontale *m*N' aurait été la longueur cherchée.

On peut aussi concevoir que le trapèze MN*mn*, **fig. 26**, tourne autour du côté horizontal *mn*, jusqu'à ce qu'il soit rabattu dans la position *mn*M''N'', **fig. 29**. Alors, M''N'' sera la ligne elle-même couchée sur le plan horizontal.

54. Ces derniers moyens, auxquels on donne le nom de *rabattements*, seront fréquemment employés par la suite, nous en ferons surtout usage pour avoir la grandeur d'une figure plane. On conçoit, en effet, que pour cela il faut construire cette figure dans ses véritables dimensions ; ce qui peut se faire, soit en cherchant les grandeurs de toutes les parties qui la composent, soit en la faisant tourner tout entière jusqu'à

ce qu'elle soit parallèle à l'un des plans de projection; car il est évident que si on la projette de nouveau dans cette position, elle sera égale à sa projection. On donne ordinairement le nom de *charnière* ou *axe* à la ligne autour de laquelle se fait le rabattement ; nous reviendrons plus tard sur ce sujet, ainsi que sur le choix le plus convenable des lignes que l'on doit prendre pour charnières.

On voit, dans la même figure, des arcs de cercles qui ont pour but de lier les constructions, et d'indiquer, autant que possible, quelles sont les lignes qui sont égales entre elles.

Dans l'épure 30, l'une des extrémités n,n' de la droite dont on cherche la longueur est située derrière le plan vertical de projection.

La droite, **fig. 31**, est perpendiculaire à la ligne AZ, et celle de la figure **32**, coupe la ligne AZ.

55. Pour exprimer qu'*une droite dans l'espace est partagée en parties proportionnelles à des lignes ou à des nombres donnés*, il suffit de partager ses projections dans le même rapport, **fig. 33**. En effet, les trois lignes M*m*, *Ss*, N*n*, **fig. 26**, étant perpendiculaires à un même plan, sont parallèles; donc elles coupent la droite MN et sa projection *mn* en parties proportionnelles.

56. Pour *partager une ligne en parties égales*, on partagera ses projections en parties égales.

57. *Exprimer qu'un point est situé dans un plan.*

Soit *a*, **fig. 34, pl. 4,** la projection horizontale d'un point situé dans un plan P; on demande la projection verticale de ce point.

Nous avons vu (45) que lorsqu'une droite engendre un plan, elle en occupe successivement tous les points ; d'où il résulte que, par chaque point d'un plan, on peut toujours concevoir une position de sa génératrice. D'après cela, **fig. 34** et **35**, menons par *a* une génératrice horizontale, sa projection verticale contiendra celle du point, de sorte qu'il n'y aura plus

qu'à construire la perpendiculaire *aa'*, pour obtenir le point *a'*. On vérifiera l'exactitude de la construction, en traçant la génératrice parallèle à la trace verticale du plan.

J'engage le lecteur à changer les données de ce problème de toutes les manières, non-seulement pour la position du point, mais encore pour celle du plan. Dans les figures **36**, **37**, on a appliqué la construction précédente à des points situés derrière le plan vertical et au-dessous du plan horizontal.

On peut encore, comme dans la figure **37**, employer une ligne oblique au plan de projection, et située dans le plan donné. Cela deviendra surtout nécessaire lorsque les pieds des génératrices parallèles aux traces ne se trouveront pas dans les limites de l'épure.

58. *Par un point donné, faire passer une parallèle à une ligne donnée.*

Le plan projetant d'une ligne droite doit contenir cette ligne, et toutes les perpendiculaires abaissées des différents points sur le plan de projection. On peut donc dire qu'une de ces perpendiculaires, avec la ligne donnée, suffit pour déterminer la position du plan projetant. Donc, si deux lignes sont parallèles dans l'espace, leurs plans projetants seront parallèles, et les traces de ces plans, ou autrement les projections des lignes données seront parallèles. D'après cela, **fig. 38**, *pour construire par un point* aa' *une parallèle à une ligne donnée* bb', *il faut faire passer par les projections du point des parallèles* c *et* c' *aux projections de la ligne donnée.*

59. *Exprimer que deux lignes droites se coupent dans l'espace.*

On conçoit facilement qu'il suffit pour cela de les faire passer par un même point (50); ainsi, les deux droites *bb'* et *cc'* projetées **fig. 39**, se coupent, et celles de la figure **40** ne se coupent pas.

60. *Trouver les traces d'une droite.*

On donne le nom de *traces* aux points suivant lesquels la ligne donnée perce les plans de projection.

Soit donc la droite *ab a'b'*, **fig. 41, 42, pl. 5.** Il est évident que le point *v,v'* appartient à la droite, puisque ses projections appartiennent à celles de la droite (17) ; de plus il appartient au plan vertical de projection, puisque sa projection horizontale *v* est sur la ligne AZ (16). Donc, il est l'intersection de la ligne donnée, avec le plan vertical : de même, le point *h,h'* étant en même temps dans le plan horizontal et sur la ligne donnée, représente l'intersection de cette ligne avec le plan horizontal.

Il résulte de ce que nous venons de dire, que *pour obtenir les traces d'une droite, il faut prolonger ses projections; puis au point où la projection horizontale rencontre la ligne* AZ, *on élèvera sur cette dernière ligne une perpendiculaire qui, par son intersection avec la projection verticale de la droite proposée, donnera la trace verticale de cette droite. De même, par le point où la projection verticale rencontrera la ligne* AZ, *on mènera à cette ligne une perpendiculaire dont l'intersection avec la projection horizontale de la ligne donnée sera la trace horizontale de cette ligne.*

61. Pour rendre les épures plus faciles à comprendre, on est convenu de tracer en lignes pleines les portions de lignes droites situées au-dessus du plan horizontal, et en deçà du plan vertical de projection, et de tracer en points les portions de ces lignes qui passent derrière ou dessous les mêmes plans.

On trace aussi quelquefois en lignes pleines les données et les résultats de la question, et en points, les lignes nécessaires à la construction de l'épure, en ayant soin de ponctuer toujours de la même manière les deux projections d'une même droite.

62. *Étant données les traces d'un plan et l'une des projections d'une droite de ce plan, trouver l'autre projection de cette même droite.*

Soient donnés, **fig. 43, 44**, le plan *p* et la projection verticale *a'b'* d'une droite située dans ce plan. La droite donnée étant prolongée, s'il est nécessaire, coupera la trace verticale

du plan donné en un point v' qui fera partie du plan vertical de projection, et aura, pour cette raison (16), sa projection horizontale v sur la ligne AZ. Ensuite, le point de la droite ab, dont la projection verticale se trouve en h' sur la ligne AZ, est, par cette raison, nécessairement situé dans le plan horizontal ; et comme, de plus, il fait partie du plan donné, puisqu'il est situé sur une droite ab, $a'b'$ de ce plan, il sera sur l'intersection du plan horizontal avec le plan donné, c'est-à-dire sur la trace horizontale de ce plan. Donc,

Étant données la projection verticale $a'b'$ d'une ligne droite, et les traces du plan P qui la contient, *on mènera par les points* v' *et* h' *deux perpendiculaires à la ligne* AZ ; *puis joignant le point* v, *où la perpendiculaire menée par le point* v' *rencontre la ligne* AZ, *avec le point* h, *où la seconde perpendiculaire rencontre la trace horizontale du plan* P, *on aura la projection horizontale* vh *de la droite.*

On ferait une construction analogue, si l'on donnait la projection horizontale de la ligne, et que l'on voulût déterminer sa projection verticale.

On pourrait vérifier l'opération en construisant (48), par un point de la droite, une des génératrices du plan.

63. Il résulte de ce qui précède, et il est très-essentiel de remarquer que, *pour exprimer qu'une droite fait partie d'un plan, il faut faire en sorte que les traces de la droite soient situées sur les traces du plan.*

On peut dire plus généralement encore que *pour exprimer qu'une droite fait partie d'un plan, il faut faire les constructions nécessaires pour que deux points* quelconques *de la droite soient situés dans le plan* (57).

64. *Étant donnés un plan* P *et un point* aa' *de ce plan, construire les projections d'une droite qui passe par ce point et qui soit située dans le plan.*

On mènera par l'une des projections du point donné, **fig. 45**, et arbitrairement, l'une des projections de la droite demandée ; puis l'on déterminera la seconde projection par le moyen que nous venons d'indiquer (62). Le problème admet une in-

finité de solutions. Dans la figure **46**, le plan donné est parallèle à la ligne AZ, et sa trace verticale est au dessous de cette ligne. Le point s'' est l'intersection de la droite demandée avec le plan auxiliaire de projection Y'Z'.

65. *Étant données les projections d'un point* g, g', *construire les traces d'un plan qui contienne ce point.*

On construira, **fig. 47, pl. 6**, une trace *pq* à volonté; cette trace déterminera la direction de la génératrice *g'd'*, dont la projection horizontale *gd* doit être (45) parallèle à la ligne AZ; puis abaissant *d'd*, on aura en *d* le pied de la génératrice, qui, étant joint avec le point *q*, déterminera la trace horizontale.

Cette construction donnera tous les plans qui, passant par le point *g*, *g'* auraient leurs traces verticales parallèles à *pq*. En recommençant dans une autre direction, on aura une autre série de plans. On pourrait aussi commencer par construire la trace horizontale.

66. *Étant données,* **fig. 48** *les deux projections d'une droite* aa', *faire passer un plan par cette droite.*

Il suffira (63) de faire passer les traces du plan par les traces (*v'*, *h*) de la droite.

Le problème admet une infinité de solutions; les plus importantes sont celles représentées figure **49**. Le plan P contient la droite, et est parallèle à la ligne AZ; le plan P_1 est perpendiculaire au plan horizontal, et le plan P_2 est perpendiculaire au plan vertical. On voit qu'en général, *pour mener par une droite un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection, il suffit de prendre pour trace, sur ce plan, la projection même de la droite, et pour l'autre trace une perpendiculaire à la ligne* AZ. Il est évident, d'après ce que nous avons dit (17), que le plan construit de cette manière sera le plan projetant de la droite donnée.

67. Supposons, **fig. 50**, qu'ayant les deux traces (*v'*, *h*) d'une droite *aa'*, et la trace verticale d'un plan qui contient cette droite, on n'ait pas sur l'épure le point où cette trace

rencontre la ligne AZ ; on prendra sur la droite un point quelconque (m, m'), et menant par ce point une génératrice parallèle à la trace connue du plan P, le pied de cette génératrice déterminera un second point n de la trace cherchée.

68. Je n'ai pas besoin de rappeler ici que les épures doivent être dessinées avec beaucoup de soin. Ainsi, un point devant être déterminé par l'intersection de deux lignes, on doit, par un choix convenable de ces lignes, tâcher que leur intersection se fasse suivant un angle approchant le plus possible de l'angle droit. Pareillement, dans la dénomination d'une ligne droite, il faudra toujours choisir les moyens de solution qui donneraient deux points très-éloignés l'un de l'autre. Ainsi, dans la figure **50**, on doit choisir la position du point m, m', de manière que le point n soit le plus loin possible du point h.

69. *Faire passer un plan par deux droites qui se coupent.*
On cherchera, **fig. 51**, les traces de ces droites ; et faisant passer deux droites par ces traces, ces lignes représenteront les traces du plan demandé (63). Si l'on a bien opéré, ces deux droites doivent se couper en un point de la ligne AZ ; dans le cas, **fig. 52**, où ce point serait hors de l'épure, on pourra construire une droite quelconque située dans le plan obtenu (62) ; et si cette ligne coupe les deux lignes données, l'exactitude des constructions sera vérifiée.

70. *Faire passer un plan par trois points donnés* mm', nn', uu'.
On joindra, **fig. 51**, ces points deux à deux par des droites, et la construction se fera comme dans le cas précédent.

71. *Faire passer un plan par deux lignes parallèles* aa',bb'.
On cherchera encore, **fig. 52**, les traces des deux lignes données, et les droites passant par ces traces seront les traces du plan cherché. On vérifiera les constructions comme nous l'avons dit (69).

INTERSECTION DES LIGNES ET DES PLANS.

72. *Trouver l'intersection de deux droites.*

Nous avons vu (59) comment on reconnaît que deux lignes droites se coupent, et dans ce cas leur intersection est toute trouvée : *elle a pour projections les points suivant lesquels se coupent les projections des deux droites.*

73. *Deux plans* P *et* P_1 *étant donnés par leurs traces, construire leur intersection.*

L'intersection de deux plans étant une ligne droite, il suffit de trouver deux points de cette ligne pour qu'elle soit déterminée ; or, **fig. 53, 54, pl. 7**, le point v', intersection des traces verticales, est un point commun aux deux plans, donc il appartient à leur intersection ; mais, comme faisant partie des traces verticales, il est nécessairement situé dans le plan vertical de projection, et par conséquent sa projection horizontale v sera sur la ligne AZ. Par la même raison, le point h, intersection des traces horizontales, faisant partie du plan horizontal de projection, sa projection verticale h' sera sur la ligne AZ.

Il ne reste plus maintenant qu'à tracer (51) la droite qui passerait par les deux points (v, v') et (h, h').

74. On peut s'assurer, par le moyen indiqué (57), qu'un point quelconque mm' de la droite (vh) ($v'h'$) est situé en même temps dans les deux plans. On conclura de ce que nous venons dire, qu'en général,

75. *Pour obtenir l'intersection de deux plans dont on a les traces, il faut, par le point d'intersection des traces verticales, abaisser une perpendiculaire à la ligne* AZ, *et joignant le pied de cette perpendiculaire avec le point de rencontre des traces horizontales, on aura la projection horizontale de la ligne demandée ; puis, du point où les traces horizontales se rencontrent, on abaissera une perpendiculaire sur la ligne* AZ ; *et joignant le pied de cette perpendi-*

culaire avec le point de rencontre des traces verticales, on aura la projection verticale de cette même ligne. Cette question est une de celles qu'il faut s'exercer à résoudre dans tous les cas. J'engage le lecteur à changer de toutes les manières possibles la position des plans donnés. Dans la figure **54**, par exemple, les deux traces horizontales se rencontrent derrière le plan vertical de projection.

Dans la figure **55**, la projection horizontale de la ligne cherchée se confond avec la trace du plan donné P_1 qui est perpendiculaire au plan horizontal, et qui, par cette raison, devient le plan projetant de l'intersection. Nous ferons souvent usage de cette combinaison de plans.

Dans la figure **56**, l'un des plans donnés P_1 est horizontal ; d'où il résulte que la ligne cherchée et la trace de l'autre plan doivent être parallèles, puisqu'elles sont les intersections de deux plans parallèles par un troisième (*Géom.*). Dans ce cas, le point hh' est situé à l'infini.

Les figures **57** et **58** sont encore des cas particuliers du même problème. Dans la dernière, les deux plans proposés sont parallèles à la ligne AZ, et leur intersection s, s', aussi parallèle à AZ, se projette sur le plan auxiliaire de projection Y'Z' par un point s''.

76. Voici encore quelques cas particuliers, qui méritent toute notre attention.

Si les deux plans proposés, que je nommerai p et p', étaient disposés comme dans la figure **59**, planche **8**, il est évident que les quatre points (v, v', h, h'), qui d'après le principe (75) nous ont servi à déterminer les projections de l'intersection des deux plans, se trouvant confondus en un seul point m, ils ne suffiraient plus pour faire connaître la direction de cette ligne ; mais comme, dans ce cas, le point m de la ligne AZ est un point commun aux deux plans, les deux projections de la ligne cherchée doivent y aboutir. Il n'y aura donc plus qu'à déterminer sa direction ; pour cela, on construira le plus loin possible du plan p', un plan p'' qui lui sera parallèle, puis cherchant (75) l'intersection des plans p et p'', on aura une ligne (t, t') parallèle à la ligne cherchée comme intersection de deux plans parallèles par un troisième plan

(*Géom.*). Il n'y aura donc plus qu'à mener par le point m deux lignes ms, ms', parallèles aux lignes t et t'. Ces droites seront les projections demandées.

On pourrait encore recourir à ce moyen, si, **fig. 60**, les quatre points (v, v', h, h') étaient tellement rapprochés, que la direction de la ligne cherchée ne pût pas être déterminée avec exactitude.

77. Enfin, il peut arriver que l'un des points d'intersection des traces ou tous les deux soient situés hors de l'épure.

Soient, **fig. 61**, les deux plans p et p' dont on demande l'intersection ; on a déjà le point (h, h') qui appartient à cette ligne ; il ne reste plus qu'à trouver un second point commun aux deux plans ; pour cela, on construira un plan auxiliaire p'', que l'on prendra horizontal pour plus de simplicité. Ce plan p'' coupera le plan p suivant une ligne a parallèle à la trace horizontale (75), et le plan p' suivant une ligne b ; de plus, ces deux lignes a et b étant toutes deux dans un même plan p'', se couperont en un point m qui appartiendra aux deux plans donnés, puisqu'il sera situé sur des lignes faisant partie de ces plans. Le point m appartenant au plan horizontal p'', sa projection verticale sera en m', de sorte que les deux lignes hm, $h'm'$, seront les deux projections de la ligne demandée.

78. Si les points vv', hh' étaient tous deux hors de l'épure, il faudrait faire deux fois la construction précédente ; seulement, pour avoir le plus grand éloignement possible entre les deux points mm', nn', qui déterminent la ligne cherchée, **fig. 62**, il faudra prendre l'un des plans auxiliaires p horizontal, et l'autre p parallèle au plan vertical de projection, tous deux le plus loin que l'on pourra de la ligne AZ. On pourrait employer le même moyen dans le cas des figures **59** et **60**.

79. *Déterminer le point d'intersection de trois plans donnés* p, p' *et* p'', **fig. 63** *et* **64**.

Nommons m le point cherché. Ce point devant appartenir aux deux premiers plans, sera sur leur intersection, que je

nommerai s, et que l'on obtiendra par la construction (73). Par la même raison, le point m devant appartenir aux plans p et p'', sera sur leur intersection, que je nommerai k. Donc le point cherché devant être en même temps sur les lignes s et k, sera où ces deux lignes se coupent.

On conçoit que si l'on cherche l'intersection des plans p et p'', cette ligne, que nous nommerons u, doit passer par le point m; ce qui donne un moyen de vérifier l'exactitude des opérations précédentes.

Les trois plans formeront, par leur intersection, un angle trièdre, qui aurait pour sommet le point cherché, et dont les trois droites s, k et u seraient les arêtes.

80. On voit encore que si les trois droites données par la construction de l'épure étaient parallèles, cela indiquerait que les trois plans sont disposés comme les faces d'un prisme triangulaire, et que le point m est situé à l'infini. Enfin,

Si deux des plans donnés étaient parallèles, deux des trois intersections seraient parallèles, et la troisième n'existerait pas.

J'engagerai les commençants à s'habituer à juger, par l'inspection de l'épure, de la position des éléments géométriques qui y sont représentés ; mais c'est ce qu'ils ne doivent faire que lorsque la question est complétement résolue dans la pensée, et tout au plus avant de commencer l'épure, afin de trouver les moyens les plus simples d'exécution.

81. En général, les difficultés que l'on éprouve lorsque l'on commence à étudier la Géométrie descriptive proviennent en grande partie de ce que l'on se préoccupe trop de la position des données.

On doit d'abord chercher à découvrir quelles sont les relations géométriques desquelles dépend la solution du problème, et ce n'est qu'après avoir trouvé ces relations qu'on les traduit par une épure.

Il faut que l'on ait bien reconnu quelles sont toutes les opérations à faire, et que la question soit complétement *résolue*, avant que la première ligne ne soit tracée sur l'épure.

C'est alors seulement que l'on doit examiner les données, afin de reconnaître si, dans leur disposition particulière, il y a quelques moyens de simplifier l'application du principe.

82. Les questions à résoudre sont ordinairement de deux espèces. Les unes, que je nommerai questions *simples*, se déduisent directement d'un théorème démontré. Les autres, que je nomme *composées*, résultent de la combinaison de plusieurs questions précédemment résolues.

Pour résoudre une question simple, il suffit de découvrir le théorème exprimant les relations géométriques qui existent entre les quantités que l'on connaît et celles que l'on cherche; et, dans ce cas, l'épure n'est plus qu'une traduction graphique de ces mêmes relations.

Mais lorsqu'une question est composée, il faut, *avant de commencer l'épure*, découvrir toutes les questions simples dont se compose la question principale, et déterminer bien exactement l'ordre suivant lequel doivent être faites les opérations successives.

Il n'est pas nécessaire pour cela de se figurer la position, dans l'espace, des lignes et des surfaces sur lesquelles on opère; cette manière d'agir serait inutile et contraire à l'esprit d'analyse. On conçoit en effet que, si l'on veut construire l'intersection de deux plans, on doit opérer en conséquence des relations générales qui ont lieu lorsque deux plans se coupent, et non d'après la position particulière de deux plans plutôt que de deux autres.

Dans le problème du n° 79, il ne faut pas chercher à *voir* dans son imagination tel plan plutôt que tel autre. Il n'est pas nécessaire de savoir si le plan p est plus incliné que le plan p'; il suffit d'appliquer deux fois de suite le principe de l'intersection de deux plans.

Ainsi, dans une opération de calcul, on doit s'occuper plus de la manière d'opérer que de la valeur des chiffres que l'on a sous les yeux.

Il en est de même dans la Géométrie descriptive; la connaissance parfaitement exacte de la position des quantités données ne faciliterait en rien la solution du problème, et si l'on veut connaître le résultat, il faut attendre que l'épure

soit terminée. Une erreur assez généralement répandue, c'est que, pour faire de la Géométrie descriptive, il faut savoir lire dans l'espace, tandis qu'au contraire pour apprendre à voir dans l'espace, il faut commencer par faire de la Géométrie descriptive.

83. Si toutefois on a besoin d'aider son imagination, on pourra le faire en représentant les lignes et les plans de l'espace par des fils de métal ou des feuilles de carton mince, ou plutôt, *ce qui sera bien préférable,* en dessinant une figure en perspective, comme on le fait dans les cours élémentaires pour démontrer les principes de la Géométrie à trois dimensions ; mais il n'est pas nécessaire que les points, les lignes ou les plans ainsi figurés soient placés comme les plans ou les lignes données par la question.

Cela ne servirait à rien et ne ferait que détourner l'attention du but principal qui est *la recherche des relations géométriques qui existent entre les données et les inconnues.*

J'insiste donc principalement sur la nécessité de ne pas confondre la *solution du problème avec l'exécution de l'épure.*

Cette seconde opération n'étant que la traduction de la première et ne devant être commencée que lorsque la première est finie.

84. Dans les écoles, on détermine presque toujours l'intersection des plans donnés par les points suivant lesquels se rencontrent leurs traces, et l'on est trop souvent disposé à présenter cette opération comme une méthode générale ; tandis que l'on regarde comme exceptions les cas où les traces ne se rencontrent pas sur l'épure.

Or, c'est précisément le contraire qu'il faudrait admettre, et l'on doit considérer comme très-rare dans la pratique le cas où l'on peut faire usage de l'intersection des traces.

Dans les épures d'étude ou d'examen, le professeur dispose les plans donnés comme cela lui plaît, et cherche ordinairement des combinaisons qui permettent d'obtenir le résultat

sur le tableau ou sur la planche à dessin ; mais, lorsqu'on arrive aux applications de la Géométrie descriptive, il faut laisser les droites et les plans à la place qui est déterminée par la question.

Ainsi, les pierres d'une voûte, les nombreuses pièces de bois qui entrent dans la composition d'un comble étant placées à toutes les hauteurs, et inclinées de toutes les manières dans l'espace, il faudrait souvent aller jusqu'à plusieurs centaines de mètres de l'épure pour rencontrer les traces des plans qui contiennent les faces dont on veut déterminer les arêtes.

85. *Il ne faut donc pas regarder l'usage des traces comme une méthode générale,* mais seulement comme un moyen de fixer les idées des commençants, et l'on doit peu à peu les habituer à éviter l'emploi de lignes que l'on ne rencontre presque jamais dans la pratique, excepté *lorsque les faces dont il s'agit sont perpendiculaires aux plans de projection.*

86. Ainsi, on détermine souvent la position des plans dans l'espace en projetant trois de leurs points, ou bien une droite et un point, deux droites qui se coupent, ou deux droites parallèles : et l'on doit s'exercer à construire dans tous les cas l'intersection des plans ainsi déterminés : ce qui sera toujours possible lorsque les projections de la partie de ligne que l'on cherche seront contenues dans les limites de l'épure. Les exemples nombreux que nous rencontrerons dans la suite familiariseront le lecteur avec ce genre de difficultés.

87. *Trouver l'intersection d'une ligne droite avec un plan.*

Soit aa' la droite dont on demande l'intersection avec le plan p, **fig. 65, pl. 9** ; on fera passer par la droite un plan quelconque p', que, pour plus de simplicité, on prendra perpendiculaire à l'un des plans de projection. Le plan p' contenant la droite donnée, contiendra le point cherché; de plus, ce point, d'après la question, doit faire partie du plan donné p ; donc il sera sur l'intersection du plan p avec le plan p' ; on construira cette intersection (73), et le point cherché devant

être en même temps sur les deux droites aa' et ss' sera au point mm', où ces deux lignes se coupent.

On s'assurera de l'exactitude des constructions, en faisant usage du plan p'' perpendiculaire au plan vertical, ou bien en construisant par le point m une génératrice horizontale du plan p.

Il faut changer de toutes les manières la position des données de cette question. Dans la figure **66**, la trace verticale du plan donné p, et celle du plan p', se rencontrent au-dessous du plan horizontal.

Dans la figure **67**, le plan donné est parallèle à la ligne AZ.

88. Dans la figure **68**, la ligne $(ab, a'b')$ est perpendiculaire à la ligne AZ, de sorte que ses deux projections sont le prolongement l'une de l'autre, et le plan p' est perpendiculaire aux deux plans de projection. Dans ce cas, on fera tourner ce plan autour de sa trace verticale, pour le rabattre sur l'épure; la ligne donnée sera représentée, dans ce rabattement, par $a''b''$, et $v's''$ sera l'intersection des plans p et p'. Le point m'', où ces deux lignes se coupent, étant ramené à sa place, aura pour ses projections les deux points m, m'. On pourra vérifier le résultat en construisant, par le point que l'on aura trouvé, une génératrice du plan p (45).

89. Dans la figure **69**, les traces verticales du plan donné p et du plan auxiliaire p', ne se rencontrant pas sur l'épure, on trouvera l'intersection de ces deux plans par la construction indiquée (77).

90. Dans la figure **70**, on a employé, comme surface auxiliaire, un plan p' parallèle à la ligne AZ, et contenant la ligne donnée (66). On peut vérifier les opérations en construisant la projection m'' du point demandé sur le plan auxiliaire de projection Y'Z'.

PARALLÉLISME DES LIGNES ET DES PLANS.

91. Nous avons vu (58) que *lorsque deux lignes sont parallèles, leurs projections sont parallèles.*

92. Nous admettrons pareillement que *lorsque deux plans sont parallèles, leurs traces sont parallèles,* puisqu'elles sont les intersections de deux plans parallèles par le plan de projection (*Géom.*). D'après cela,

93. *Étant donnés un plan et un point, construire par le point un second plan parallèle au premier.*

Soient donnés, **fig. 71, pl. 10,** le plan p et le point aa'. On construira par le point a' une parallèle à la trace verticale du plan p, et par conséquent à celle du plan cherché p'. Cette droite, considérée comme génératrice du plan cherché, aura pour projection horizontale ad, et son pied d sera un point de la trace horizontale demandée. On construira cette trace parallèle à celle du plan donné, et le point où cette trace rencontrera la ligne AZ appartiendra à la trace verticale cherchée, que l'on mènera parallèlement à celle du plan p.

94. On aurait pu, par une construction analogue, chercher d'abord un point de la trace verticale.

95. Dans la figure **72,** on a projeté le point aa' sur le plan auxiliaire Y'Z', puis, par la projection a'' de ce point, on a mené parallèlement à la trace du plan p la ligne su, que l'on a prise pour trace du plan cherché ; ce qui a donné en s et en u' un point pour chacune des deux autres traces de ce plan.

96. *Étant donnés un plan et un point quelconque de l'espace, construire par ce point une parallèle au plan donné.*

Étant donnés, **fig. 73,** le plan p et le point aa', on tracera une ligne *quelconque* bc, $b'c'$, située dans le plan p (64), puis on construira parallèlement à cette ligne, et par le point donné une ligne (ad, $a'd'$) qui sera parallèle au plan p, puisqu'elle sera parallèle à une droite (bc, $b'c'$) située dans ce plan (*Géom.*).

On voit que le problème est indéterminé, et qu'en recommençant la construction dans toutes les directions, on aura

autant de droites que l'on voudra passant par le point donné, et parallèles au plan donné.

Il est encore facile de reconnaître que toutes ces droites seront dans un même plan ; d'où résulte un moyen plus simple de résoudre la même question.

97. On construira d'abord par le point (aa'), **fig. 74,** et par le moyen indiqué (93), un plan p' parallèle au plan p, et il n'y aura plus qu'à mener (64), par le point donné, des droites qui soient situées dans le plan p'.

98. Il résulte de ce qui précède, que lorsque deux lignes sont parallèles entre elles, ou que deux plans sont parallèles, on le voit à l'inspection de l'épure, puisque les projections des lignes dans le premier cas, et les traces des plans dans le second, sont parallèles ; mais il n'en est pas de même du parallélisme d'une ligne avec un plan. Lorsqu'une ligne est parallèle à un plan, les projections de la ligne ne sont pas pour cela parallèles aux traces du plan ; de sorte que si l'on avait sur une épure les traces d'un plan et les projections d'une droite, et que l'on voulût savoir si la droite est parallèle au plan, il faudrait voir (62) si l'on peut construire dans le plan une parallèle à la droite, ou bien (66) si l'on peut construire par la droite un plan parallèle au plan donné.

99. *Étant donnés une droite et un point, faire passer par le point un plan parallèle à la droite.*

Soient, **fig. 75,** aa' le point donné, bb' la droite donnée ; on mènera (58) par le point, et parallèlement à la droite bb', la ligne $(ac, a'c')$; et tout plan construit suivant cette dernière ligne sera nécessairement parallèle à la première (*Géom.*). La question admet une infinité de solutions.

100. *Deux droites étant données, faire passer par l'une d'elles un plan parallèle à l'autre.*

Par un point quelconque mm' de la ligne bb', **fig. 76,** on fera passer une ligne cc' parallèle à la droite aa' ; puis, construisant (69) le plan qui contiendra les deux droites (bb')

cc'), on aura satisfait à la question. En effet, les lignes *aa'*, *cc'* étant parallèles, tout plan contenant l'une d'elles sera parallèle à l'autre (*Géom.*).

PERPENDICULARITÉ DES LIGNES ET DES PLANS.

101. *Lorsqu'une ligne droite est perpendiculaire à un plan, les projections de cette ligne sont perpendiculaires sur les traces du plan.*

Soit, **fig. 77, pl. 11,** la droite AB perpendiculaire sur le plan P ; représentons le plan de projection par P' et par P'' le plan projetant la droite ; alors *ac* sera la projection de cette droite, et *bc* sera la trace du plan P. Or le plan P'', comme plan projetant, est nécessairement perpendiculaire sur le plan de projection P' ; de plus, il est perpendiculaire sur le plan P, puisqu'il contient la droite AB, qui, d'après la question, est perpendiculaire à ce plan. Il résulte donc de là que le plan P'' étant perpendiculaire en même temps sur le plan P et sur le plan de projection P', sera perpendiculaire à leur intersection *bc*, qui n'est autre chose que la trace du plan P ; et réciproquement, cette ligne *bc* sera perpendiculaire au plan P'', et par conséquent à toute ligne telle que *ac* qui passerait par son pied dans ce plan : ce qu'il fallait démontrer.

102. Réciproquement, **fig. 78,** *si par les projections* a, a' *d'un point, on mène deux droites perpendiculaires aux traces d'un plan* p, *on pourra regarder ces lignes comme étant les projections d'une droite située dans l'espace, perpendiculairement au plan* p; car les deux plans projetant *p'* et *p''* étant perpendiculaires sur les traces du plan *p*, seront tous deux perpendiculaires à ce plan (*Géom.*), et par conséquent la ligne *ab*, *a'b'*, qui est leur intersection, sera aussi perpendiculaire au plan *p*.

103. *Donc, pour exprimer qu'une ligne est perpendiculaire à un plan, ou réciproquement, il faut faire en sorte que les projections de la ligne soient perpendiculaires sur les traces du plan,* **fig. 78.**

104. Ce théorème conduit à la solution de toutes les questions de perpendicularité ; mais, avant de passer à l'application, je rappellerai ce que j'ai déjà dit au numéro 82.

Pour résoudre une question simple, il suffit de découvrir le théorème que l'on doit appliquer immédiatement. Ainsi, dès que nous avons démontré qu'un plan perpendiculaire sur une droite doit avoir ses traces perpendiculaires sur les projections de cette droite, il est évident qu'il suffit d'établir cette perpendicularité sur l'épure pour construire un plan perpendiculaire à une ligne donnée.

Mais lorsqu'une question est composée, il faut, *avant de commencer l'épure*, déterminer bien exactement l'ordre suivant lequel doivent être faites toutes les opérations.

105. Qu'il s'agisse, par exemple, de *déterminer la distance d'un point à un plan*, on dira presque toujours qu'il faut abaisser du point une perpendiculaire sur le plan ; après quoi on devra chercher la longueur de cette perpendiculaire.

Cette réponse, qui paraît exacte au premier abord, est cependant loin d'être complète ; et l'erreur provient surtout de ce qu'on oublie que les droites et les plans employés ici comme moyens de solution doivent toujours être considérés comme infinis (12) ; de sorte qu'il n'est point exact de dire que l'on mesurera la longueur de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan, puisque cette ligne est infinie.

Voici de quelle manière la question devait être résolue.

Étant donnés, **fig. 80**, le plan P et le point A,

1re *opération*. On tracera par le point A une droite *mn* perpendiculaire au plan donné P.

2e *opération*. On déterminera le point B suivant lequel la perpendiculaire *mn* perce le plan P.

3e *opération*. On cherchera la longueur de la portion AB de perpendiculaire comprise entre le point donné et le plan.

La question étant ainsi décomposée, on commencera l'épure, en exécutant successivement chacune des *trois* opérations précédentes, dans l'ordre suivant lequel nous venons de les indiquer. Ainsi, **fig. 79** :

1re *opération*. On tracera, par les points a et a', les deux droites ab, $a'b'$ respectivement perpendiculaires sur les traces du plan p. Ces deux lignes seront les projections de la droite AB perpendiculaire sur le plan P, **fig. 80**.

2e *opération*. On déterminera (87) le point b, b' suivant lequel la droite ab, $a'b'$ perce le plan p ; de sorte que ab, $a'b'$ seront les deux projections de la portion de perpendiculaire comprise entre le point et le plan donné.

3e *opération*. On fera tourner la droite ab, $a'b'$ autour de la verticale projetante du point aa' ; ce qui donnera a'B pour la distance du point aa' au plan p.

Dans la figure **81**, le plan donné est parallèle à la ligne AZ, et la ligne ab, $a'b'$, qui mesure la distance du point a au plan, se trouve rabattue en $a''b''$ suivant sa véritable grandeur.

106. Supposons actuellement que l'on veuille *déterminer la distance de deux plans parallèles* p *et* p', **fig. 83**.

Représentons d'abord les deux plans donnés par P et P', **fig. 82**, et cherchons quel doit être l'ordre des opérations.

1° On construira (103) une droite quelconque mn perpendiculaire en même temps aux deux plans P et P'.

La distance de ces plans étant partout la même, il est évident que la droite mn pourra être tracée où l'on voudra.

2° On déterminera (87) le point A, suivant lequel la droite mn perce le plan P.

3° On déterminera de la même manière le point B, suivant lequel la droite mn perce le plan P'.

Alors AB sera la portion de perpendiculaire comprise entre les deux plans P et P', et représentera par conséquent leur distance.

4° On cherchera la grandeur de AB en opérant comme nous l'avons dit au n° 52.

Quoique j'ai indiqué par des renvois aux articles précédents l'ordre des constructions graphiques qui doivent être successivement exécutées, je répète qu'il ne faut pas commencer l'épure avant d'avoir reconnu complétement quelles

sont toutes les opérations simples dont se compose la question principale.

107. On pourrait encore, pour obtenir la distance demandée, prendre un point *quelconque* situé dans l'un des deux plans (57), puis mesurer la distance de ce point à l'autre plan, en opérant comme la question du n° 105.

108. Dans la figure **84**, les plans donnés sont parallèles à la ligne AZ, et leur distance se trouve projetée en $a''b''$, suivant sa véritable longueur.

109. *Étant donnés un plan et un point, construire par le point un plan perpendiculaire au premier.*

Soient, **fig. 85**, **pl. 12**, le plan p et le point aa' : 1° on fera passer par le point une droite av, $a'v'$ perpendiculaire au plan p (103) ; 2° on construira (66) autant de plans que l'on voudra contenant cette droite ; tous ces plans sont perpendiculaires au plan donné. En effet, on sait (*Géom.*) que si une droite mn, **fig. 86**, est perpendiculaire à un plan P, tout plan contenant cette droite mn sera aussi perpendiculaire au plan P.

110. Nous reconnaissons, par le résultat, qu'on ne peut pas, à la vue d'une épure, savoir si deux plans perpendiculaires l'un à l'autre, et que l'angle suivant lequel se coupent les deux traces n'apprend rien à cet égard. Mais si l'on voulait mettre en évidence la perpendicularité de deux plans, on prendrait un point de leur intersection (73); puis, après avoir mené par ce point une perpendiculaire à l'un des plans donnés (103), on ferait les constructions nécessaires pour reconnaître si elle est contenue dans l'autre plan (63). Ou bien, on chercherait l'angle des plans en opérant comme nous le dirons bientôt.

111. *Étant donnés un plan et une droite, construire par cette droite un second plan perpendiculaire au premier.*

Soient, **fig. 87**, le plan p et la droite aa'; on prendra sur la droite un point quelconque mm'; puis après avoir mené par ce point une droite bb' perpendiculaire au plan donné, il n'y aura

plus qu'à construire (69) un plan qui contienne ces deux droites, car il est évident qu'il sera perpendiculaire au plan donné, puisqu'il contiendra une droite *bb'* perpendiculaire à ce plan.

112. Nous avons vu (103) que *pour exprimer qu'un plan est perpendiculaire sur une droite, il faut mener les traces du plan perpendiculaires sur les projections de la droite.* D'après cela,

113. *Par un point donné, faire passer un plan perpendiculaire à une droite donnée.*

Soient, **fig. 88**, *aa'* la droite donnée, et *bb'* le point donné ; on mènera *b'd'* perpendiculaire à la projection verticale de la droite donnée. Cette ligne, considérée comme génératrice du plan demandé, aura pour projection horizontale *bd*, et son pied *d* appartiendra à la trace horizontale du plan cherché ; alors on pourra construire cette trace perpendiculaire à la projection horizontale de la ligne donnée, et par suite la trace verticale.

On aurait pu commencer par chercher un point de la trace verticale.

114. *Par un point pris sur une droite, mener des perpendiculaires à cette droite.*

Étant donnée, **fig. 90**, la droite *ab*, *a'b'* on veut par le point *bb'* mener des perpendiculaires à cette droite ; on construira par le point *bb'* un plan *p* perpendiculaire à la droite donnée (113), puis on fera passer par le point *bb'* des droites situées dans le plan *p* (64) ; toutes ces droites perpendiculaires sur la droite donnée, **fig. 89**.

115. On voit, par la solution de ce problème, que lorsque deux droites sont perpendiculaires entre elles, leurs projections ne sont pas pour cela perpendiculaires ; de sorte que *si l'on avait les projections de deux droites, et que l'on voulût savoir si elles sont perpendiculaires l'une à l'autre, il faudrait construire l'angle qu'elles font entre elles, ou chercher si parmi tous les plans que l'on peut faire passer par l'une d'elles (66), il peut y en avoir un dont les traces seraient perpendiculaires sur les projections de l'autre ligne.*

116. *Trouver la distance d'un point à une droite.*

Il est évident qu'il faut d'abord obtenir la perpendiculaire abaissée du point sur la droite donnée ; pour cela, représentons, **fig. 91**, par A le point donné, et par B la droite donnée ; 1° on mènera par le point A un plan perpendiculaire sur la droite ; 2° on déterminera (87) l'intersection de la droite avec ce plan, ce qui donnera en C le pied de la perpendiculaire ; 3° joignant ce point avec le point donné, on aura la perpendiculaire AC abaissée du point A sur la droite donnée ; 4° il n'y aura plus qu'à chercher la grandeur de la perpendiculaire AC par le moyen indiqué (52).

Les constructions précédentes ont été exécutées figure **92**.

117. *Trouver la distance de deux droites parallèles.*

Soient A, B, **fig. 94**, les deux droites données : 1° on construira le plan P perpendiculaire sur ces droites ; 2° on déterminera (87) le point C suivant lequel ce plan coupe la droite A ; 3° on obtiendra de la même manière le point D, intersection du même plan avec la droite B ; 4° traçant CD, on aura une perpendiculaire aux deux parallèles données ; car ces deux lignes étant toutes deux perpendiculaires au plan P, sont perpendiculaires à la droite qui joint leurs pieds dans ce plan ; 5° il n'y a plus à chercher (52) la grandeur de la perpendiculaire commune CD.

La figure **93** contient les opérations.

118. Parmi les problèmes que nous venons de résoudre, les plus remarquables sont ceux qui résultent de la combinaison de deux plans, de deux lignes, ou d'une ligne avec un plan.

119. Je rappellerai que l'inspection de l'épure suffit pour faire connaître le parallélisme de deux plans ou de deux lignes ; tandis que l'on ne peut s'assurer que par une construction du parallélisme d'une ligne avec un plan.

Le contraire a lieu pour la perpendicularité ; car, lorsqu'une ligne est perpendiculaire à un plan, réciproquement les projections de la ligne sont perpendiculaires sur les traces du plan, au lieu que la perpendicularité de deux plans ou

de deux lignes ne peut être reconnue que par une construction, puisque cette perpendicularité est indépendante de l'angle que font les traces des deux plans ou les projections des deux lignes que l'on compare.

120. Problème. *Trouver la distance de deux droites quelconques.*

Solution. On sait que la distance de deux points est le plus court chemin pour aller d'un de ces points à l'autre ; c'est pourquoi cette distance a ordinairement pour mesure la portion de la ligne droite qui passe par les points donnés.

On sait de même que la distance d'un point à une droite ou à un plan est la perpendiculaire abaissée du point sur la droite ou sur le plan donné ; que la distance de deux droites ou de deux plans parallèles est la partie de perpendiculaire comprise entre les plans ou les droites données.

Voyons donc comment on pourra trouver le plus court chemin entre deux droites quelconques, ce qui revient évidemment à déterminer sur ces lignes les deux points les plus rapprochés.

Soient, **fig. 96, pl. 13,** les droites données A et B.

1re *opération.* On prendra sur B un point quelconque M.

2e On fera passer par le point M une droite C parallèle à la droite A.

3e Les droites B et C détermineront le plan P parallèle à la droite A.

4e On prendra sur la droite A un point quelconque N.

5e On fera passer par le point N une droite H, perpendiculaire sur le plan P.

6e On déterminera le point D suivant lequel la droite H perce le plan P.

7e On fera glisser la droite H parallèlement à elle-même en l'appuyant sur la droite A, jusqu'à ce que le point D soit arrivé en S sur la droite B.

8e La droite KS, parallèle à ND et par conséquent perpendiculaire au plan P, sera la plus courte distance entre les deux droites données A et B.

En effet, la droite KS perpendiculaire sur le plan P sera

perpendiculaire sur la droite B qui passe par son pied dans le plan P.

Par la même raison, elle sera perpendiculaire sur SD et par conséquent sur la droite A parallèle à SD.

Il est d'ailleurs évident que la droite KS est plus courte que toute autre droite qui joindrait un point quelconque V de la droite A avec un autre point quelconque U de la droite B.

En effet, si par le point V on conçoit la droite VO perpendiculaire sur le plan P et si l'on trace la droite OU, le triangle VOU sera rectangle en O, ce qui donnera :

(1) $$VU > VO;$$

mais les deux droites VO et KS étant toutes les deux perpendiculaires sur le plan P comprises entre les parallèles KN et SD, on a

(2) $$VO = KS.$$

Ajoutant les équations (1) et (2), et réduisant, on obtient

$$VU > KS;$$

donc la droite KS est la plus courte distance des deux droites A et B.

Épure. Si l'on a bien compris tout ce qui précède, il sera facile d'en suivre l'expression sur la figure **95**. Il suffira de se rappeler que suivant les conventions admises au numéro 29, la droite B est représentée sur l'épure par ses projections bb' ; la droite A par ses projections aa' ; le point M par mm', etc.

Ainsi, pour exécuter l'épure, on construira successivement :

1° Le point mm' pris à volonté sur bb' ;
2° La droite cc', parallèle à aa' ;
3° Le plan p déterminé par les droites bb', cc' ;
4° Le point nn' pris à volonté sur aa' ;
5° La droite hh' perpendiculaire sur p ;
6° Le point dd' intersection de la droite hh' avec le plan p ;
7° La droite ds, $d's'$ parallèle à cc' aa' ;
8° La droite ks, $k's'$ parallèle à nd, $n'd'$, et par conséquent perpendiculaire au plan p.

Les deux projections de la droite sk, $s'k'$, étant obtenues

sur l'épure, on fera tourner cette droite autour de la verticale projetante du point *ss'*, ce qui donnera *s'*K pour la distance des deux droites *aa'* et *bb'*.

Je ferai remarquer ici ce que j'ai déjà dit plus haut, c'est que la solution du problème dépend uniquement de la Géométrie ordinaire.

C'est dans la décomposition de la question principale, dans la recherche des opérations successives, et de l'ordre dans lequel ces opérations doivent être faites, que consiste la solution.

La construction de l'épure a uniquement pour but de traduire chacune de ces opérations dans le langage de la Géométrie descriptive, et, je le répète, on ne doit pas tracer une seule ligne sur l'épure avant que la question ne soit complétement résolue.

121. *Trouver le centre et le rayon d'une sphère dont la surface passerait par quatre points donnés.*

Le centre de la sphère étant à égale distance de tous les points de sa surface, il est évident (*Géom.*) que si l'on joint par une ligne droite deux points de cette surface, et que par le milieu de cette droite on mène un plan qui lui soit perpendiculaire, ce plan passera par le centre. D'après cela, étant donnés, **fig. 97**, quatre points *aa*, *bb'*, *cc'*, *dd'*, on joindra le point *a* avec le point *b* ; puis par le point *vv'*, milieu de la corde *ab*, on mènera (113) un plan *p* perpendiculaire à cette corde : ce plan contiendra le centre de la sphère demandée. De même par le point *zz'*, milieu de la corde *bc*, on mènera un plan *p'* perpendiculaire à cette corde : ce plan passera encore par le centre, enfin par le point *uu'*, milieu de *cd*, on mènera un troisième plan perpendiculaire à cette corde, et qui, par conséquent, contiendra aussi le centre de la sphère.

On aura par ce moyen trois plans contenant le centre de la sphère demandée. Cherchant (79) le point commun à ces trois plans, on aura le centre de cette sphère.

Après avoir obtenu le point *mm'* qui représente le centre de la sphère, on joindra ce point avec un quelconque des points donnés qui, d'après la question, appartiennent à la

surface, et la droite am, $a'm'$ sera le rayon de la sphère. Cherchant enfin (52) la longueur de ce rayon, on obtiendra la ligne Am', avec laquelle, des points m et m' comme centres, on décrira deux cercles qui seront les projections verticale et horizontale de la sphère.

Il sera bon, avant de décrire les deux cercles dont je viens de parler, de s'assurer de l'exactitude des constructions. Pour cela, on joindra le point m avec chacun des quatre points donnés, ce qui donnera quatre rayons dont on cherchera la longueur : et si ces longueurs sont égales, ce sera une preuve suffisante que le point obtenu est à égale distance des quatre points donnés, et que, par conséquent, il est le centre de la sphère dont la surface passerait par ces quatre points.

122. Pour déterminer le point m, nous avons fait usage des plans perpendiculaires sur les milieux des trois cordes ab, bc, cd ; mais si ces plans n'étaient pas commodément placés pour l'exécution de l'épure, il serait facile d'en trouver d'autres. En effet, si l'on joint par des droites et de toutes les manières possibles les quatre points donnés, on aura six cordes ab, ac, ad, bc, bd, cd. Or, si par le milieu de chacune de ces six cordes on mène un plan qui lui soit perpendiculaire, on obtiendra six plans passant par le centre de la sphère cherchée ; comme trois de ces plans suffisent pour déterminer le centre, on choisira ceux qui donneront les constructions les plus simples.

Si les quatre points étaient dans un même plan, les cordes qui joindraient ces points seraient aussi contenues dans ce plan. Les plans menés perpendiculairement à ces cordes seraient, ainsi que leurs intersections, perpendiculaires au plan qui contiendrait les points donnes. Le centre de la sphère serait infiniment loin, et cette sphère ayant un rayon infiniment grand, sa surface se confondrait avec le plan passant par les points donnés.

Enfin, si ces quatre points, étant dans un même plan, se trouvaient situés sur la circonférence d'un cercle, on le reconnaîtrait, parce que les plans perpendiculaires sur les milieux des cordes passeraient tous par une même droite perpendiculaire au plan de ce cercle, et qui en contiendrait

le centre, de sorte que le problème serait indéterminé, et que l'on pourrait prendre tel point de cette droite que l'on voudrait pour centre de la sphère demandée, et pour rayon la distance de ce point à l'un des points donnés.

On voit que dans ce cas le rayon pourrait être aussi grand que l'on voudrait, mais qu'il ne pourrait pas être plus petit que celui du cercle qui passerait par les points donnés.

123. Nous avons résolu la question précédente d'une manière générale, mais assez souvent sans rien changer aux données d'une question ; on peut, par quelques considérations particulières, en rendre la solution plus simple.

Pourvu que l'on ne change rien aux données d'une question, il n'y aura rien non plus de changé dans le résultat, et l'on doit rester le maître de choisir le système de plan de projection que l'on jugera le plus favorable à l'exécution de l'épure ; on peut même dire que si le but de la théorie est de généraliser les idées en dégageant les questions principales de toutes les circonstances particulières, l'art du praticien, au contraire, consiste à profiter de ces mêmes circonstances pour résoudre le cas particulier dont il s'occupe, de la manière la plus simple.

124. Ainsi, dans le problème précédent, on conçoit que, sans rien changer à la position relative des quatre points donnés, on peut prendre, **fig. 98**, pour l'un des plans de projection, celui qui contiendrait trois de ces points, a, b, c, par exemple, et pour second plan de projection, un plan perpendiculaire au premier et parallèle à la droite cd, qui joindrait l'un des trois premiers points avec le quatrième. Par ce moyen, les deux plans p et p' se couperont suivant une droite s perpendiculaire au plan abc, et le troisième plan p'' étant perpendiculaire au second plan de projection, sera percé par la droite s en un point mm' qui sera le centre de la sphère. Quant au rayon (am, $a'm'$), on en cherchera la longueur par le moyen connu (52).

CHAPITRE III.

Rabattements.

125. Nous avons dit au n° 52 que, pour avoir la grandeur de la portion de ligne droite qui joint deux points, il fallait faire tourner cette ligne jusqu'à ce qu'elle soit parallèle à l'un des plans de projection.

L'opération que je viens d'énoncer, et que l'on nomme *rabattement*, a servi dans la solution de plusieurs questions précédentes.

L'importance que les rabattements doivent acquérir par la suite dans les applications de la Géométrie descriptive doit nous engager dès à présent à présenter quelques considérations genérales sur ce genre d'opération.

126. Je ferai d'abord remarquer qu'une épure, quelle qu'elle soit, n'est elle-même autre chose que le résultat d'un rabattement.

En effet, les deux plans de projection devant toujours faire un angle dans l'espace, ce n'est qu'au moyen d'un rabattement que l'un de ces plans a pu devenir le prolongement de l'autre.

Nous avons supposé (8) que le plan horizontal avait tourné autour de la droite AZ, jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le prolongement du plan vertical ; on peut tout aussi bien admettre que c'est le plan vertical que l'on a rabattu sur le prolongement du plan horizontal. Cette dernière supposition sera même plus naturelle, toutes les fois que l'épure sera placée sur une table, comme cela est nécessaire pour l'exécution du travail graphique.

Les plans de projection n'étant autre chose que des conceptions géométriques destinées à faciliter la solution des problèmes, ils sont toujours à la disposition de celui qui opère, et par conséquent on devra tâcher de choisir ces plans, de manière que les opérations qui en dépendent soient les plus simples possible.

Or, il est évident que, dans les exemples des nos 52 et suivants, on aurait évité le rabattement de la droite MN, si au lieu du plan vertical qui contient la ligne AZ, on avait pu prendre un plan vertical de projection parallèle à MN; parce qu'alors la droite donnée mn, $m'n'$, aurait été projetée sur ce plan dans sa véritable grandeur; mais on ne pourra pas toujours prendre dès l'origine le plan de projection le plus simple; c'est-à-dire que le plan qui serait le plus commode pour résoudre une certaine partie de la question ne sera pas toujours celui qui conviendrait le mieux pour une autre opération dépendant du même problème. Dans ce cas, on sera quelquefois conduit à prendre autant de plans de projections différents qu'il y aura d'opérations particulières dans la question principale, et toutes ces projections auxilaires devront être rabattues sur l'épure, chacune selon sa position.

127. Il existe d'ailleurs une classe particulière de questions qui peut presque toujours être résolue avec avantage par le moyen des rabattements.

On sait que les questions de Géométrie sont de deux espèces : les unes appartiennent à la Géométrie plane, et les autres dépendent de la Géométrie à trois dimensions.

On dit qu'une question appartient à la Géométrie plane, lorsque les données, les résultats, et toutes les lignes d'opération sont dans un même plan.

Or, toutes les fois que, parmi les questions particulières qui, par leur combinaison, devront concourir à la solution d'une question principale, il y aura quelques constructions qui devront être exécutées dans un plan oblique, on rabattra ce plan sur l'épure; puis, après avoir exécuté les opérations nécessaires, on ramènera le tout à la place qu'il doit occuper dans l'espace.

La première chose à faire, lorsqu'on veut exécuter un rabattement, c'est de choisir la droite autour de laquelle on veut faire tourner le plan que l'on rabat.

Nous donnerons à cette droite le nom d'*axe* ou de *charnière* de rabattement, et nous la supposerons toujours immobile.

128. Les rabattements ayant principalement pour but d'obtenir certaines figures planes dans leur véritable grandeur, il faut *que la droite prise pour axe soit parallèle à l'un des plans de projection;* car si on faisait tourner une figure plane autour d'une droite qui ne satisferait pas à la condition que nous venons d'énoncer, la figure que l'on ferait tourner, ne pouvant *jamais* être parallèle au plan de projection, ne se projetterait jamais sur ce plan dans sa grandeur véritable.

Lorsque l'on fait un rabattement, chaque point décrit dans l'espace un cercle qui a son centre sur l'axe de rotation, et qui a pour rayon la distance de cet axe au point que l'on rabat.

Les notions précédentes étant admises, nous allons compléter cette théorie par quelques exemples.

129. Supposons, **fig. 99, pl. 14**, que l'on veuille rabattre le point m, m' sur le plan horizontal qui contient la droite ab, $a'b'$ et que l'on ait choisi cette droite pour l'axe de rabattement.

Dans ce mouvement, le point mm' ne quittera pas le plan vertical, qui a pour trace la droite mm^{IV} perpendiculaire sur ab; et pour connaître la place que le point M de l'espace doit venir occuper sur le plan horizontal qui contient la droite ab, il suffit de chercher la grandeur de la droite mo, $m'o'$, qui n'est autre chose que le rayon de l'arc de cercle parcouru par le point mm', dans son mouvement autour de la droite ab, $a'b'$.

Pour obtenir la grandeur de la droite mo, $m'o'$, il faudra opérer, comme nous l'avons dit aux nos 52, 53, etc.; c'est-à-dire que l'on fera tourner cette ligne autour de l'horizontale projetante du point o.

Le point mm' décrit alors un arc de cercle $m'm''$ parallèle au plan vertical de projection, et qui, par cette raison, doit avoir sa projection horizontale mm''' parallèle à la ligne AZ.

Par suite de cette opération, on aura $m'''o$ pour la grandeur de la droite mo, $m'o'$, et par conséquent pour la distance du point mm' à la droite ab, $a'b'$; de sorte qu'en ramenant $m'''o$ dans la position $m^{\text{IV}}o$, le point m^{IV} sera la place occupée par le point mm' rabattu en tournant autour de ab, sur le plan horizontal qui contient cette droite.

130. Il est très-essentiel de remarquer que, dans l'opération précédente, il y a deux rabattements. L'un, qui se fait autour de ab, a pour but de rabattre le point mm' sur le plan horizontal $a'b'$.

Le second, qui a lieu autour de l'horizontale projetante du point o, sert à déterminer la distance du point mm' à la droite ab, que l'on a prise pour axe du rabattement.

131. L'opération serait bien plus simple, si la droite que l'on prend pour axe du rabattement était perpendiculaire à l'un des plans de projection.

En effet, dans ce cas, **fig. 100**, l'arc de cercle parcouru par le point mm' autour de la droite aa' sera parallèle au plan vertical de projection, et la place du point mm', rabattu en m''' sur le plan horizontal $a'm'$, sera déterminée directement, puisque l'on connaît la distance $a'm'$ de ce point à la droite aa'.

Nous conclurons de ce qui précède,

1° Que les conditions essentielles pour qu'une droite puisse servir d'axe de rabattement, c'est qu'elle soit *parallèle à l'un des plans de projection et située dans le plan que l'on veut rabattre.*

2° Que les constructions seront encore plus simples lorsque l'axe du rabattement sera *perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

Or, dans un plan incliné quelconque, on pourra toujours choisir un axe parallèle à tel plan de projection que l'on voudra ; mais on ne pourra obtenir une perpendiculaire au plan de projection que dans un plan qui satisferait lui-même à cette condition.

131. Cependant ce résultat pourra toujours être obtenu en

prenant un plan auxiliaire de projection perpendiculaire au plan que l'on veut rabattre.

En effet, reprenons la question que nous avons déjà résolue au n° 129, et proposons-nous, comme alors, de rabattre le point mm' sur le plan horizontal $a'b'$, en le faisant autour de la droite ab, $a'b'$.

Si nous remplaçons le plan vertical de projection par le plan auxiliaire pcm^{IV}, et que nous concevions ce dernier plan rabattu sur l'épure en tournant autour de sa trace horizontale cm^{IV}, le point mm' aura pour nouvelle projection verticale le point m'', que l'on obtiendra en faisant $mm''=vm'$, et la droite horizontale ab, $a'b'$ étant perpendiculaire au nouveau plan vertical de projection pcm^{IV}, elle se projettera sur ce plan par un seul point o'', de sorte que le chemin parcouru par le point mm' sera représenté sur le nouveau plan de projection par l'arc de cercle $m''m'''$, ce qui donnera m^{IV} pour la place que vient occuper le point mm' rabattu sur le plan horizontal $a'b'$.

133. Cette disposition d'épure contribue beaucoup à faire comprendre l'enchaînement des idées, parce qu'elle permet de projeter les arcs parcourus par chacun des points que l'on fait tourner.

On devra aussi éviter, autant que possible, de faire un rabattement sur une partie de l'épure qui serait déjà occupée par un autre rabattement ou par une projection.

Les principes que nous venons d'exposer, et qui seront fréquemment employés par la suite, correspondent au problème connu dans l'analyse algébrique sous le nom de *transformation de coordonnées*. Là, comme ici, le choix des axes ou des plans coordonnés est une des parties les plus importantes de la solution des problèmes.

Nous allons reprendre, comme exercices, quelques-unes des questions qui ont été résolues dans le chapitre précédent.

134. *Déterminer la distance d'un point à un plan.*

Supposons qu'il s'agisse de *déterminer la distance du point* aa' *au plan* p, **fig. 102**.

1re *opération*. On construira d'abord le plan vertical p' perpendiculaire sur la trace horizontale du plan p, et par conséquent perpendiculaire à ce plan.

Le plan p' contiendra la perpendiculaire abaissée du point aa' sur le plan p.

2e *opération*. On fera tourner le plan p' autour de sa trace verticale, jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le plan vertical de projection.

Dans ce mouvement, le point aa' viendra se placer en a'', et le point s en s'', après avoir décrit deux arcs horizontaux dont les centres o et o' ont tous deux le point o pour projection horizontale.

3e *opération*. On tracera la ligne vs'', qui sera l'intersection du plan donné p par le plan auxiliaire p'; et la droite $a''b''$, perpendiculaire sur vs'', sera la distance du point aa'' au plan p.

En effet, les deux plans p et p' étant perpendiculaires entre eux, la droite $a''b''$, située dans le plan p' et perpendiculaire à l'intersection vs'', est aussi perpendiculaire au plan p, et mesure par conséquent la distance de ce plan au plan donné aa'.

Si on voulait avoir la projection verticale de la perpendiculaire $a''b''$, on ramènerait cette ligne dans le plan p, ce qui donnerait $a'b'$.

Il est évident qu'au lieu du plan vertical p', on aurait pu employer un plan perpendiculaire à la trace verticale du plan donné. Dans ce cas on rabattrait ce plan sur le plan horizontal.

135. *Mesurer la distance de deux plans parallèles*, **fig. 103.**

1re *opération*. On construira le plan p'' perpendiculaire sur les traces horizontales des deux plans donnés p, p', et par conséquent perpendiculaire à ces deux plans.

2e *opération*. On rabattra le plan p'' en le faisant tourner autour de sa trace verticale, ce qui donnera les deux droites vs, $v's'$ provenant de l'intersection des deux plans p et p' par le plan auxiliaire p''.

On remarquera que les deux droites vs, $v's'$ doivent être

parallèles entre elles, puisqu'elles sont les intersections de deux plans parallèles par un troisième plan.

3e *opération*. La droite *mn*, perpendiculaire aux deux droites *vs*, *v's'*, sera la distance des deux plans *p* et *p'*.

136. *Déterminer la distance d'un point à une droite*, **fig. 104**.

1re *opération*. Concevons par le point donné *aa'* un plan horizontal *p*.

L'intersection de ce plan par la droite donnée *bb'* sera un point *n'* que l'on projettera en *n* sur le plan horizontal.

2e *opération*. La ligne droite *an*, *a'n'* sera une horizontale située dans le plan qui contient le point et la droite donnée.

3e *opération*. Nous ferons tourner la droite *bm*, *b'm'* autour de l'horizontale *an*, *a'n'*, jusqu'à ce qu'elle soit ramenée dans le plan horizontal *p*.

Dans ce mouvement, le point *nn'* ne changera pas de place, puisqu'il appartient à la droite *an*, *a'n'*; que nous prenons pour axe de rabattement. Mais si nous prenons, sur la droite donnée, un point quelconque *mm'*, il est évident que ce point, en tournant autour de *an*, ne quittera pas le plan vertical qui aurait pour trace la droite mm^{IV} perpendiculaire sur *an*. De sorte qu'en cherchant, comme nous l'avons fait au no 129, la distance om^{IV} du point *mm'* à la droite *an*, *a'n'*, nous obtiendrons m^{IV} pour la place occupée par le point *mm'* rabattu sur le plan *p*.

Il ne restera donc plus qu'à tracer la droite nm^{IV} et la perpendiculaire *au*, qui sera la distance demandée.

137. *Mesurer la distance de deux droites parallèles*, **fig. 105**.

1° On coupera, comme précédemment, les deux droites données par un plan horizontal ; ce qui donnera deux droites *s* et *r*.

2° On joindra ces deux points par la droite *sr*, qui sera une horizontale située dans le plan des deux droites données, et qui, pour cette raison, remplira les conditions nécessaires pour former un axe de rabattement (128).

3° On cherchera, comme précédemment, la distance om^{IV} d'un point quelconque *mm'* à la droite *sr*, de sorte que rm^{IV}

sera l'une des parallèles données rabattue sur le plan horizontal.

La deuxième parallèle sa'' sera déterminée, puisque l'on connaît un de ses points s et sa direction parallèle à rm^{IV}.

4° Il ne restera plus qu'à construire la perpendiculaire nu, qui sera la distance cherchée.

138. *Mesurer la distance de deux droites quelconques.*

Cette question, que nous avons déjà étudiée au n° 120, peut être résolue par un double rabattement. En effet, les droites données étant exprimées par B et par D, si l'une d'elles dd', **fig. 1, pl. 15,** était perpendiculaire au plan horizontal de projection, il est évident que la droite mn, $m'n'$ perpendiculaire sur les droites bb' et dd' serait projetée sur le plan horizontal dans sa véritable grandeur mn.

Or il est facile d'obtenir ce résultat en faisant tourner les deux droites données jusqu'à ce que l'une d'elles soit perpendiculaire à l'un des deux plans de projection. Pour y parvenir, on pourra opérer de la manière suivante :

1re *opération*, **fig. 3.** On fera tourner la droite D de l'espace autour de la verticale projetante aa' de l'un quelconque de ses points.

Dans ce mouvement, le point V décrira un arc de cercle horizontal vv'', $v'v'''$, et lorsque la droite D sera parallèle au plan vertical de projection, sa nouvelle projection horizontale d'' sera parallèle à la ligne AZ, et les points v'' et v''' seront les nouvelles projections du point V.

2e *opération*, **fig. 4.** On fera tourner ensuite la droite D autour de l'horizontale projetante ss' de l'un de ses points, et l'on arrêtera le mouvement lorsque cette droite D sera perpendiculaire au plan horizontal de projection.

Dans ce mouvement le point O décrira l'arc $o'o'''$, oo''.

La nouvelle projection horizontale de la droite D sera réduite au point d^{IV}, et sa nouvelle projection verticale d^{V} sera perpendiculaire à la ligne AZ.

Ainsi, **fig. 5**, par deux mouvements de rotation, l'un autour d'une verticale aa' et l'autre autour d'une horizontale projetante ss', on pourra toujours amener une droite quelconque D dans une position perpendiculaire au plan horizontal de projection.

Par des opérations analogues, on pourra, si on le préfère, faire tourner la droite donnée jusqu'à ce qu'elle soit perpendiculaire au plan vertical de projection.

139. Épure. Si l'on a bien compris ce qui précède, il sera facile d'exécuter l'épure qui est tracée sur la figure **2** ; ainsi les droites données étant *bb'* et *dd'* :

1re *opération*. Par le point suivant lequel se rencontrent les projections horizontales *b* et *d* des deux droites données B et D, on tracera la verticale *aa'*. Cette droite coupera les deux lignes données suivant des points qui seront projetés sur le plan vertical par *e'* et *c'* ; or si l'on fait tourner la droite D autour de la verticale *aa'*, le point V viendra se projeter en *v''v'''* après avoir décrit l'arc horizontal *vv''*, *v'v'''*.

2e *opération*. On joindra le point *v'''* avec *c'* et *v''* avec *c*, de sorte que les deux droites *d''* et *d'''* seront les nouvelles projections de la droite D, ramenée dans un plan parallèle au plan vertical de projection.

Mais, si nous admettons que la droite B ait été entraînée dans le mouvement précédent, de manière toutefois que les deux droites données aient toujours conservé entre elles la même position relative, tous les points de ces droites auront décrit des arcs semblables, et ceux de ces points qui seront à égale distance de l'axe *aa'* auront décrit des arcs égaux.

Par conséquent, si l'on prend sur la droite B un point U dont la projection horizontale *u* serait située sur le cercle *vv''* ; l'arc *uu''*, *u'u'''* décrit par le point U sera égal à l'arc de cercle *vv''*, *v'v'''* décrit par le point V, de sorte qu'au moment où ce dernier point sera venu se projeter en *v'v'''*, le point U se projettera par les points *u''*, *u'''*, et joignant le point *u''u'''* avec *ee'*, les droites *b''* et *b'''* seront les nouvelles projections de la droite B.

3e Par le point *s'* suivant lequel se rencontrent les nouvelles projections verticales *b'''* et *d'''* des deux droites données, on tracera l'horizontale projetante *s's*.

Cette droite coupera la droite D en un point dont la projection horizontale sera *d*IV, et la droite B en un point qui n'a pas pu être placé sur l'épure.

Or, si l'on fait tourner la droite D autour de l'horizontale projetante ss', le point oo' viendra se projeter en o''' après avoir décrit l'arc de cercle $o'o'''$, oo'', parallèle au plan vertical de projection. La droite D, devenue verticale, se projette alors sur le plan horizontal par un seul point d^{IV}, et sa nouvelle projection verticale d^{V} sera perpendiculaire à la ligne AZ.

Mais, pendant que le point O de l'espace a décrit l'arc oo'', $o'o'''$, le point E, situé sur le même cercle, a dû décrire l'arc $e'e'''$ égal à $o'o'''$, et lorsque le point E est venu se projeter sur le plan vertical en e''', sa nouvelle projection horizontale est devenue e''.

Pour remplacer la projection horizontale du point suivant lequel la droite B rencontre l'horizontale projetante ss', on choisira sur la droite B un point quelconque $u''u'''$, et l'on remarquera qu'au moment où la droite B se projette sur le plan vertical par la droite b^{V}, le point U doit se projeter en $u^{\text{V}}u^{\text{IV}}$, après avoir décrit l'arc vertical $u'''u^{\text{V}}$, $u''u^{\text{IV}}$.

4° Par suite du mouvement que nous venons d'indiquer, la droite B est projetée par les droites $b^{\text{IV}}b^{\text{V}}$, et la droite D, perpendiculaire au plan horizontal de projection, est projetée sur ce dernier plan par le point d^{IV}; de sorte que la droite $d^{\text{IV}}m^{\text{IV}}$ perpendiculaire sur b^{IV} sera la projection horizontale de la perpendiculaire commune aux deux droites données B et D.

Si l'on n'a pas d'autre but que de connaître la distance de ces deux droites, on peut considérer l'opération comme terminée : mais si l'on veut obtenir les deux projections de la perpendiculaire commune, on y parviendra facilement en construisant :

1° La projection verticale $m^{\text{V}}n^{\text{V}}$ de la droite obtenue $m^{\text{IV}}n^{\text{IV}}$;

2° Les projections $m''n''$, $m'''n'''$, qui appartiendraient à la même droite si l'on faisait revenir les lignes B et D dans leurs positions $b''b'''$ et $d''d'''$;

3° Enfin, les projections mn et $m'n'$ de la droite qui représenterait la perpendiculaire commune, si les deux droites données B et D étaient ramenées à leurs positions primitives.

140. Au lieu de faire tourner les droites données dans l'espace jusqu'à ce que l'une d'elles soit perpendiculaire à l'un des

plans de projection, on préfère ordinairement, comme nous l'avons dit au n° 132, introduire un nouveau plan de projection perpendiculaire à l'une des droites données. Ainsi :

1re *opération*, fig. 6. On construira où l'on voudra un plan P perpendiculaire à la droite dd'.

2e On prendra un plan auxiliaire de projection YA'Z' vertical et parallèle à la même droite dd'.

3e On prendra sur la droite dd' deux points quelconques aa', nn' que l'on projettera sur le plan YA'Z'.

On obtiendra par ce moyen la droite d'' pour la projection de la droite D sur le plan YA'Z' et la troisième trace du plan P sera perpendiculaire sur d''.

4e On rabattra le plan P sur l'épure en le faisant tourner autour de sa trace horizontale, et l'on obtiendra le point d''' pour la projection de la droite D sur le plan P.

5e On choisira sur la droite B deux points quelconques uu', vv', et l'on construira les projections u'' et v'' de ces deux points sur le plan YA'Z'.

6e On construira les projections u''' et v''' des mêmes points sur le plan P rabattu.

7e La droite $n'''m'''$, perpendiculaire sur b''', sera la véritable longueur de la perpendiculaire commune aux deux droites données B et D.

8e Si l'on veut retrouver les projections de la perpendiculaire obtenue, on ramènera le point m''' en m'' et l'on construira la droite $m''n''$, parallèle à la troisième trace du plan P et par conséquent parallèle à ce plan.

9e La projection horizontale mn se déduira facilement des deux projections auxiliaires $m''n''$, $m'''n'''$.

10e Enfin, la projection verticale $m'n'$ s'obtiendra en élevant des perpendiculaires par les points m et n de la projection horizontale, et l'on fera bien de s'assurer que les hauteurs sont les mêmes sur les deux plans verticaux de projection YA'Z et YA'Z'.

141. La disposition d'épure que nous venons d'employer étant celle qui convient le mieux pour les grandes applications pratiques, j'indiquerai encore quelques exemples de cette méthode.

142. *Une droite* a'c', **fig. 109, pl. 16**, *étant donnée dans un plan oblique* p, *construire un carré qui aurait pour côté la droite donnée et qui serait situé dans le plan* p.

Cette question est évidemment du genre de celles dont nous avons parlé au n° 127. Ainsi :

1re *opération*. On rabattra le plan donné en le faisant tourner autour de sa trace horizontale.

Par suite de ce mouvement, la droite donnée deviendra $a''c''$.

2e On construira un carré qui ait pour côté cette droite.

3e On ramènera le plan p à sa place, ce qui donnera $acxz$ pour la projection horizontale du carré demandé.

4e On déduira la projection verticale en employant le principe du n° 57.

Les constructions seront simplifiées en prenant comme ci-dessus un plan auxiliaire de projection YA'Z' perpendiculaire à la trace horizontale du plan donné, parce qu'alors les arcs de cercles parcourus par les différents points du plan p, lorsque l'on rabat ce plan ou qu'on le ramène à sa place, se projetteront par des arcs de cercles sur le plan auxiliaire YA'Z' (132).

On fera bien aussi, comme étude, de vérifier les points où les côtés prolongés du carré rencontreront le plan horizontal, le plan vertical, ou le plan auxiliaire de projection.

143. Dans la figure **107** on s'est proposé de construire les deux projections d'un cercle situé dans un plan parallèle à la droite AZ.

Pour y parvenir, on a d'abord rabattu le plan donné, on a décrit le cercle, et l'on a ensuite ramené le tout à sa place.

Les arcs de cercles parcourus dans ces différentes opérations sont projetés par des arcs de cercles sur le plan auxiliaire p'.

La tangente a été construite dans le rabattement, d'où on l'a ensuite ramenée à sa place.

144. Dans la pratique, les rabattements des plans ne se font pas autour de leurs traces, qui ne sont presque jamais situées dans les limites des épures. Pour avoir une figure plane en vraie grandeur, il suffit de la faire tourner jusqu'à

ce qu'elle soit *parallèle à l'un des plans de projection*, et dans ce cas, on pourra toujours prendre pour axe de rabattement une droite *quelconque, située dans le plan que l'on veut rabattre, et parallèle au plan de projection sur lequel on veut projeter la figure rabattue.*

145. Supposons, par exemple, que l'on veut construire les deux projections d'un cercle passant par trois points donnés aa', cc', oo', **fig. 106**, on tracera les droites (ac, $a'c'$) (ao, $a'o'$) (co, $c'o'$) que l'on coupera par un plan horizontal quelconque K'H'. La droite um que l'on obtiendra sera horizontale et située dans le plan qui contient les trois points donnés.

On projettera ces points en o'', a'' et c'' sur le plan vertical KH perpendiculaire à la droite um.

On fera tourner ensuite le plan des trois points donnés autour de l'horizontale um, $u'm'$, ce qui donnera a''', o''' et c''' par lesquels on fera passer une circonférence de cercle dont on ramènera tous les points en les projetant successivement sur les droites DK et DS, d'où il sera facile de déduire leurs projections horizontales et verticales.

La hauteur de chacun des points de la projection verticale au dessus de K'H' sera égale à la hauteur du point correspondant de DS au dessus de la droite KH. On peut vérifier les projections de chaque point en ramenant le rayon correspondant comme cela est indiqué pour les points $oo'xx'$.

146. Avant de tracer les projections du cercle on fera bien de construire un certain nombre de tangentes. Ainsi, par exemple, pour obtenir la tangente au point aa', on la construira d'abord au point a''' sur la figure rabattue, ce qui déterminera le point e sur la charnière de rabattement, puis on tracera la tangente ea et sa projection verticale $e'a'$.

Si l'on n'a pas sur l'épure le point suivant lequel la tangente rencontre l'axe de rabattement, on ramènera tout autre point ; ainsi, pour la tangente au point xx', on a ramené le point v''' suivant lequel elle coupe le prolongement du diamètre horizontal du cercle.

On pourra aussi ramener le point r''' suivant lequel la tangente du point a''' est occupée par celle du point x''', etc.

En exécutant cette épure sur une grande échelle, on pourra, comme exercices, construire un grand nombre de vérifications qui n'ont pas été conservées.

147. Si les points donnés étaient situés dans un plan vertical P, **fig. 110**, l'opération serait encore plus simple et le rabattement se ferait autour d'une verticale quelconque située dans le plan qui contient les points donnés.

148. Sur la figure **108** le plan du cercle est perpendiculaire à la ligne AZ.

149. Pour ne rien laisser à désirer sur la question importante des rabattements, j'indiquerai une dernière méthode qui est en grande faveur dans les écoles et dans les examens, quoiqu'elle soit peu commode, et par conséquent très-rarement employée dans la pratique ; lorsqu'il s'agit surtout de rabattre un grand nombre de points.

Soit, **fig. 1, pl. 17**, le point aa' que l'on veut faire tourner autour de la droite horizontale cc', jusqu'à ce que le plan qui contient le point et la droite soit venu prendre une projection horizontale P.

On tracera la droite $ao, a'o'$ parallèle au plan vertical de projection, ce qui déterminera le triangle auo, rectangle en u. Or, dans ce triangle, on connaît le côté horizontal ou qui appartient à la charnière de rabattement cc', et l'hypoténuse $a'o'$, qui est projetée en vraie grandeur sur le plan vertical de projection, puisqu'elle est parallèle à ce plan. Il sera donc facile de construire le triangle rabattu oua'', en décrivant l'arc de cercle mn avec une ouverture de compas $oa'' = o'a'$.

150. La figure **2** contient le rabattement du point aa', que l'on a fait tourner autour de la droite ee', parallèle au plan vertical de projection.

151. Sur la figure **3** on s'est proposé de construire un cercle ayant pour centre un point donné cc' et qui soit tangent

à une horizontale donnée bb'. Le centre étant rabattu en c'', en opérant comme ci-dessus, on décrira le cercle, dont il sera facile d'obtenir les projections en ramenant les rayons, ou d'autres lignes passant par les points que l'on veut ramener ; les opérations n'ont été conservées que pour le point $x''xx$, et pour la tangente qui lui correspond.

152. Sur la figure **4** le plan P est rabattu en tournant autour de sa trace horizontale. Il suffit, dans ce cas, de rabattre un point quelconque aa' de la trace verticale.

Enfin, sur la figure **5**, le plan P est rabattu sur le plan vertical de projection.

Voici encore quelques exercices sur les rabattements.

153. Plan oblique de projection. Fig. 6. *Un point étant donné par ses deux projections* a *et* a', *on se propose de construire la projection* a''' *de ce point sur un plan* P, *puis de rabattre ce dernier plan sur l'épure.*

Première méthode (140). On introduira un plan auxiliaire de projection Y'A'Z' perpendiculaire à la trace horizontale du plan P, et par conséquent perpendiculaire à ce plan.

On rabattra le plan Y'A'Z', en le faisant tourner autour de sa trace horizontale A'Z'. Par ce mouvement, la verticale A'Y' viendra se placer en A'Y'', et si l'on fait $A'n''$ égale à $A'n'$, la droite $s''n''$ sera la troisième trace du plan P : car il ne faut pas oublier qu'un plan doit avoir autant de traces qu'il y a de plans de projection.

L'épure étant disposée comme nous venons de le dire, on construira la troisième projection a'' du point donné aa'.

Cette projection sera déterminée en abaissant du point a une perpendiculaire sur A'Z' et portant sur cette perpendiculaire une quantité $c''a''$ égale $c'a'$, qui exprime la distance du point donné au plan horizontal de projection.

La perpendiculaire abaissée du point aa'' sur le plan P percera ce plan en un point projeté par t'' sur le plan auxiliaire Y''A'Z'', et lorsque l'on rabat le plan P en le faisant tourner autour de sa trace horizontale ss''. Le pied de la perpendiculaire abaissée du point aa'' décrit un arc de cercle qui a le point z pour centre.

Cet arc, parallèle au plan auxiliaire de projection Y'A'Z', se projette sur ce plan par $t''t'''$ et la droite $t'''a'''$, perpendiculaire sur A'Z', détermine sur le prolongement de az le point a''' qui est la projection du point aa' sur le plan P rabattu.

En opérant de la même manière, on pourra projeter sur le plan P tout autre point ou ligne de l'espace.

Ainsi, les points vv', uu' étant projetés d'abord en v'' et u'' sur le plan auxiliaire Y''A'Z', on en déduira facilement les projections v''' et u''' des mêmes points sur le plan P ; de sorte que la droite $v'''u'''$ sera la projection de la droite vu, $v'u'$ sur le plan P rabattu.

On pourra également, comme exercice ou comme vérification, obtenir sur le plan P la projection e''' du point e, suivant lequel la droite vu, $v'u'$ percerait le plan horizontal de projection ou le point r''', projection du point r'', suivant lequel la même droite est coupée par le plan P.

Les arcs de cercle décrits du point A' comme centre ont pour but de rappeler que les projections d'un même point doivent être à la même hauteur sur les deux plans verticaux Y'A'Z', Y''A'Z' ; mais il faut bien remarquer que ces arcs ne représentent pas le chemin parcouru dans l'espace par chacun des points de la droite A'Y' lorsque l'on rabat cette ligne en A'Y'' : car il est évident, par exemple, que le point n' ne peut venir se placer en n'' qu'en décrivant deux arcs de cercle dont le premier, perpendiculaire à la ligne A'Z, et projeté par $A'n'$ sur le plan vertical Y'A'Z, a pour but de ramener le point n à la place qu'il occuperait dans l'espace si le plan Y'AZ était revenu à sa position perpendiculaire au plan horizontal de projection, tandis que si l'on rabat le plan Y'A'Z', le point nn' décrit un second arc perpendiculaire sur A'Z' et projeté sur l'épure par $A'n''$.

154. Deuxième méthode. On peut rabattre le plan P en opérant comme nous l'avons dit au n° 152.

Cela étant fait, supposons que nous voulons obtenir la projection a''' du point aa', nous remarquons que la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan P est l'intersection des deux plans projetants P_1 et P_2.

Or, le premier de ces plans étant perpendiculaire à la trace

horizontale ss'', coupe le plan P suivant une ligne az qui, dans le rabattement, se confond avec la trace horizontale du plan P_1.

Ensuite le plan P_2 perpendiculaire sur la trace verticale sn' du plan P, coupe ce plan suivant la droite $a'x'$ qui devient $x'''a'''$ perpendiculaire sur la trace sx''' du plan P rabattu. On fera donc sx''' égal à sx'; de sorte que les deux droites aa''' perpendiculaire sur ss'' et $x'''a'''$ perpendiculaire sur sx''' se couperont suivant le point a''' qui sera la projection du point aa' sur le plan P rabattu.

En opérant de la même manière, on déterminera les points u''', v''', et par conséquent la droite b''' qui est la projection de la ligne bb' sur le plan P rabattu.

155. Comme application du principe précédent nous reprendrons le problème que nous avons déjà résolu de plusieurs manières aux numéros 120, 138 et 140.

Les droites dont on veut obtenir le distance étant bb' et dd', **fig. 1, pl. 18,**

1° On construira le plan P perpendiculaire à l'une des droites données dd' par exemple ;

2° On rabattra le plan P en opérant comme nous l'avons dit au n° 152;

3° On ramènera le point u' en u'' par un arc de cercle décrit du point s comme centre, ou, ce qui revient au même, on fera su'' égal à su' ;

4° On tracera $u''d''$ perpendiculaire sur la trace so'' du plan P rabattu, et l'intersection de la droite $u''n''$ avec la droite d donnera le point d'' pour la projection de la droite D sur le plan P rabattu (154) ;

5° On choisira sur la droite bb' deux points quelconques aa' et cc'', puis, en opérant comme nous l'avons dit au n° 152, on obtiendra les projections a'' et c'' de ces deux points sur le plan P rabattu ; cette opération déterminera b'' projection de la droite B sur le plan P ;

6° La droite $d''m'''$, perpendiculaire sur b'', sera la projection de la perpendiculaire commune aux droites données B et D ;

7° La droite MN de l'espace, étant perpendiculaire sur la

droite D sera parallèle au plan P, d'où il résulte que sa projection $d''m''$ ou $n''m''$ sera la distance des deux droites données;

8° Si l'on veut obtenir les projections verticale et horizontale de la droite MN, on ramènera d'abord le point m'' en m par la droite $m''m$, perpendiculaire à la trace horizontale du plan P ;

9° On ne pourra pas employer le même moyen pour obtenir le point n sur la projection horizontale de la droite d.

Mais, si dans le plan P rabattu on construit la droite $v''r$ parallèle à $u''s$, qui dans le rabattement représente la trace verticale du point P, il est évident qu'en ramenant ce plan à la place qu'il doit occuper dans l'espace, la droite $v''r$ parallèle à la trace verticale $u''s$ du plan P aura pour projection horizontale la droite rv, parallèle à la ligne AZ ; de sorte que la droite ve sera l'intersection du plan P par le plan qui contient la droite D, et la perpendiculaire commune MN.

Or cette dernière ligne, parallèle au plan P, sera par conséquent parallèle à la droite ve ; de sorte qu'en traçant mn parallèle à ev, on déterminera le point n sur la projection horizontale de la droite D.

10° La projection verticale $m'n'$ se déduira, facilement de la projection horizontale mn.

156. J'ai recommencé la construction précédente sur la figure **2**, avec cette seule différence, qu'au lieu de projeter les droites données sur un plan perpendiculaire à celle que nous avions nommée B dans l'exemple précédent, je les ai projetées toutes deux sur un plan perpendiculaire à la seconde droite.

Mais, pour ne pas répéter l'analyse du problème et pour que l'explication précédente puisse convenir à la figure **2**, j'ai désigné par bb' la droite qui avait été nommée D, et par dd' celle que nous avions nommée B.

Par ce moyen, la figure **2** peut être considérée comme une traduction *mot à mot* de la figure **1**, dont elle ne diffère que par la disposition des lignes d'opérations, et si l'on exécute sur la figure **2** tout ce que nous avons dit de la figure **1**, on pourra reconnaître que, malgré la différence apparente des

deux épures, les opérations nécessaires pour arriver au résultat sont exactement les mêmes et doivent être exécutées dans le même ordre.

Dans cette seconde épure on a changé la position de la ligne AZ, ce qui revient à faire mouvoir les plans de projection parallèlement à eux-mêmes ; or, tant que l'on conserve la position relative des données, il ne doit y avoir rien de changé dans le résultat (26).

CHAPITRE IV.

Les angles.

ANGLES DES LIGNES.

157. *Étant donné*, **fig. 111, pl. 19**, *les projections de deux droites* (aa′ bb′), *on demande de construire l'angle que ces deux droites font entre elles.*

On cherchera d'abord les points (*cc′*, *dd′*) où les droites données vont percer le plan horizontal ; puis, prenant la droite *cd* pour axe, on fera tourner le plan des deux droites données autour de cette ligne, jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le plan horizontal de projection. Dans ce mouvement, le sommet de l'angle que les droites font entre elles décrira un cercle dont le centre sera placé en *uu′* sur l'axe de rabattement. Le plan de ce cercle étant vertical, il aura pour projection horizontale la droite *uss‴*, et pour rayon la véritable grandeur de la droite *su*, *s′u′*. On cherchera (52) cette longueur représentée sur l'épure par la ligne *us″*, et on la portera de *u* en *s‴* ; ce qui donnera la position que le sommet de l'angle viendra prendre sur le plan horizontal. Enfin, si l'on joint le point *s‴* avec *c* et *d*, on aura l'angle demandé *cs‴d* rabattu sur le plan horizontal.

La construction précédente nous a donné l'angle aigu que les deux droites font entre elles ; si l'on voulait avoir l'angle obtus, il suffirait de prolonger un des côtés de l'angle obtenu.

Si les points *c*, *d*, étaient hors des limites de l'épure, on pourrait faire le rabattement autour de toute autre ligne horizontale, telle que *co*, *c'o'*, située dans le plan de deux lignes données.

On pourrait encore, si cela était plus commode, prendre pour axe du rabattement une ligne parallèle au plan vertical ; dans ce cas, on ferait tourner le plan de l'angle jusqu'à ce qu'il soit parallèle au plan vertical de projection.

158. Dans la figure **112**, on a cherché l'angle formé par les lignes *aa'* et *bb'* ; mais comme la première de ces lignes était parallèle au plan horizontal, il était naturel de la prendre pour axe du rabattement. On a pris sur la droite *bb'* un point quelconque *mn'* ; puis, après avoir cherché la véritable distance *um''* de ce point à la droite *sa*, on a porté cette distance de *u* en *m'''*, ce qui a donné la position du point *m* rabattu sur le plan horizontal qui contient la ligne *aa'* ; joignant enfin *m'''* avec *s*, on a obtenu *m'''su* pour la grandeur de l'angle cherché.

159. Dans la figure **113**, l'un des côtés de l'angle cherché est vertical. Prenant ce côté *aa'* pour axe, on a fait tourner le plan des deux droites jusqu'à ce qu'il soit arrivé dans sa position *au*. Alors l'angle est projeté en *a's'u'* selon sa véritable grandeur.

160. Dans les exemples précédents, nous avons supposé que les droites données se coupaient ; mais dans la Géométrie descriptive comme dans l'analyse algébrique, on considère l'inclinaison de deux droites indépendamment de leur intersection. D'après cela, si l'on *demandait de construire l'angle que font entre elles deux droites qui ne se coupent pas*, on prendrait un point quelconque sur l'une d'elles ; puis, après avoir mené par ce point une parallèle à l'autre ligne, l'angle que l'on formerait par ce moyen représenterait l'inclinaison des deux lignes données ; on chercherait sa grandeur par la construction précédente.

161. *Partager en deux parties égales l'angle que deux droites font entre elles.*

Soit, **fig. 114**, les deux droites (aa', bb') ; on prendra la droite (cd, $c'd'$) pour axe, et l'on fera tourner l'angle jusqu'à ce qu'il soit rabattu dans le plan horizontal en $cs''d$. Dans cette position qui donne la véritable grandeur, on le partagera en deux parties égales (*Géom.*) par la droite $s''v$; mais cette ligne, qui doit être dans le plan de l'angle, est encore rabattue sur le plan horizontal, il reste donc à la ramener à sa place. Or, le point v où cette droite coupe l'axe du rabattement ne devant pas bouger, il suffira de concevoir le point s'' revenu à sa position s, ce qui donnera sv pour la projection horizontale de la droite demandée. Le point v appartenant à la droite cd fait partie du plan horizontal, et, par conséquent, se projettera en v' sur la ligne AZ ; menant $s'v$, on aura la projection verticale de la même ligne.

Nous avons partagé en deux parties égales l'angle aigu formé par les deux droites données. On trouverait de la même manière les projections (su, $s'u'$) de la droite qui partagerait l'angle obtus.

On conçoit qu'il faudrait opérer de la même manière si, au lieu de partager l'angle donné en parties égales, on voulait le partager dans un autre rapport ; ou bien encore si l'on voulait, dans un plan donné, construire une droite faisant un angle donné avec une autre ligne de ce plan.

ANGLES DES LIGNES ET DES PLANS.

162. *Construire l'angle qu'une droite fait avec un plan.*

On sait (*Géom.*) que l'angle d'une droite avec un plan se mesure par l'angle que cette droite fait avec sa projection sur ce plan.

Ainsi l'angle que la droite SC, **fig. 115**, fait avec le plan P aurait pour mesure SCB ou son égal CSD ; mais pour éviter la construction de la ligne CB, on remarquera que l'angle demandé CSD est le complément de l'angle que la ligne donnée ferait avec la ligne SB perpendiculaire au plan P, d'où résulte la construction qui suit : 1° on prendra, **fig. 115, 116**, sur la droite donnée un point quelconque S ; on abaissera

de ce point la ligne SB perpendiculaire au plan donné ; 3° on rabattra l'angle BSC que ces droites font entre elles ; 4° on en prendra le complément.

163. *Construire les angles qu'une droite fait avec les plans de projection.*

Soit la droite donnée (ab, $a'b'$), **fig. 117** ; l'angle que cette droite fait avec le plan horizontal est situé dans le plan vertical qui contient cette droite et sa projection. Prenant pour axe la verticale $a'u'$, on fera tourner ce plan jusqu'à ce que le sommet (bb') de l'angle cherché soit projeté au point b''. Alors cet angle étant parallèle au plan vertical, sera projeté en $a'b''u'$, selon sa véritable grandeur.

Le plan de l'angle formé par la droite avec le plan vertical, contenant cette droite et sa projection verticale $a'b'$, on le fera tourner autour de l'horizontale bv, jusqu'à ce que le sommet (aa') soit venu se projeter en a'' ; ce qui donnera $ba''v$ pour la véritable grandeur de l'angle que la droite donnée fait avec le plan vertical.

164. Si la droite donnée (ab, $a'b'$), **fig. 118**, était perpendiculaire à la ligne AZ, un même plan contiendrait les deux angles que cette droite ferait avec les plans de projection, et le rabattement de ce plan sur le plan vertical donnerait en même temps ces deux angles, dont l'un aurait le sommet en a' et l'autre en b''.

On pourrait aussi les rabattre sur le plan horizontal.

165. *Construire une droite qui fasse des angles donnés avec les plans de projection.*

Représentons, **fig. 119**, par v l'angle que la droite demandée doit faire avec le plan vertical, et par h l'angle de cette même droite avec le plan horizontal. On construira en a l'angle h au-dessus de la ligne AZ, et l'angle v au-dessous, puis on prendra deux distances égales ac', ad.

Supposons que ac' soit la ligne demandée rabattue sur le plan vertical ; si nous ramenons cette droite à la place qu'elle doit occuper dans l'espace, en la faisant tourner autour de la verticale du point a, de manière qu'elle fasse toujours le

même angle avec le plan horizontal, le point *cc'* décrira un cercle horizontal (*cb*, *c'b'*). Si, de plus, nous regardons *ad* comme le rabattement de la même droite sur le plan horizontal, en ramenant cette ligne à sa place, le point *dd'* décrira un cercle (*db*, *d'b'*) parallèle au plan vertical. Or, les points *cc'* et *dd'*, qui appartiennent tous deux à la droite demandée, étant à égale distance du point *a*, ne doivent faire qu'un seul et même point, et comme ce point doit se trouver en même temps sur les deux cercles dont nous venons de parler, il sera au point *bb'* où ces deux cercles se coupent, de sorte que (*ab*, *a'b'*) sont les deux projections de la droite cherchée.

On est assuré que les cercles se coupent, parce que les points *b* et *b'* sont sur une même perpendiculaire à la ligne AZ.

Si la somme des deux angles donnés était égale à un angle droit, les deux cercles se toucheraient au lieu de se couper, et la droite demandée serait perpendiculaire à la ligne AZ.

Enfin, si la somme de ces angles était plus grande qu'un angle droit, les deux cercles n'auraient pas de point commun, et le problème serait impossible. En effet, si l'on place une droite quelconque dans le plan vertical, et si, en partant de cette position, on la fait tourner de manière qu'elle fasse toujours le même angle avec le plan horizontal, on conçoit que l'angle avec le plan vertical, qui d'abord était nul, augmentera jusqu'à ce que la droite soit venue se placer dans un plan perpendiculaire à la ligne AZ. Alors la somme des deux angles vaudra un angle droit et aura atteint son *maximum;* car il est évident que si l'on continue à faire tourner la droite, l'angle avec le plan vertical diminuera de nouveau, jusqu'à ce qu'il devienne nul comme il l'était avant que l'on eût commencé à faire mouvoir la droite.

Si l'on prolongeait les projections verticales et horizontales des deux cercles, on aurait un second point d'intersection, et par suite une seconde position de la droite demandée. Nommons (*ac*, *a'c'*) les projections de cette seconde droite, et supposons, pour mieux fixer les idées, que l'on ait transporté le point *a* hors de la ligne AZ, comme on le voit, **fig. 120** ; il sera facile de s'assurer que les quatre droites (*ac*, *a'c'*), (*ac''*, *a'c'*), (*ab*, *a'b'*), (*ab''*, *a'b'*), satisfont toutes les quatre aux con-

ditions demandées. Ces droites sont les arêtes d'une pyramide quadrangulaire qui aurait pour base le rectangle $cc''b''b$, et pour sommet le point aa'.

Si l'on demandait que la droite passât par un point donné, on ferait à ce point toutes les opérations qui ont été faites au point a de la ligne AZ.

ANGLES DES PLANS.

166. *Construire l'angle que deux plans font entre eux.*

On sait (*Géom.*) que pour avoir l'angle de deux plans il faut mesurer l'angle que font entre elles deux droites. menées dans chacun de ses plans perpendiculairement à un même point de leur intersection.

Soient, **fig. 121, pl. 20**, les deux plans p et p'; on construira (73) la projection horizontale vh de l'intersection de ces deux plans, puis on mènera p rpendiculairement à cette ligne la droite p'' qui représentera la trace horizontale du plan dans lequel se trouve l'angle que l'on cherche. Si l'on fait tourner ce plan autour de sa trace p'' pour le rabattre sur le plan horizontal, le sommet de l'angle faisant partie de l'intersection des deux plans se meut dans le plan vertical $v'vh$, et ne peut, par conséquent, se rabattre que sur la ligne vh. Il ne reste donc plus qu'à connaître sa distance à la ligne p'' que l'on prend ici pour axe du rabattement : pour cela, faisons tourner le plan $v'vh$ autour de sa trace verticale vv'. L'intersection des deux plans donnés viendra prendre, dans le plan vertical, la position $v'h'$; le point u, qui représente le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle demandée sur la ligne p'', se rabattra en u', et abaissant du point u' une perpendiculaire sur $v'h'$, cette perpendiculaire $u's'$ représentera le plan de l'angle cherché et donnera en même temps la distance du sommet de cet angle à la ligne p''; de sorte qu'en portant cette longueur $s'u$ de u en s, on aura asb pour l'angle demandé rabattu sur le plan horizontal.

Par cette construction, nous avons évité de construire la projection de l'angle cherché dont on ne demandait que la véritable grandeur.

167. On pourrait rabattre le plan vertical $v'vh$ sur le plan horizontal. Dans ce cas, l'intersection des deux plans serait représentée par $v''h$, et le sommet de l'angle cherché par s''.

On pourrait encore, si cela était plus commode, faire sur le plan vertical toutes les constructions que nous avons faites sur le plan horizontal.

168. Dans la figure **122**, les traces horizontales des plans donnés se coupent derrière le plan vertical ; cela ne change rien à l'ordre des constructions, qui sont seulement disposées dans un autre sens. L'intersection des deux plans est rabattue sur le plan horizontal en $v''h$.

169. Dans la figure **123**, l'un des plans est parallèle à la ligne AZ.

170. Dans la figure **124**, les deux plans donnés, et par conséquent leur intersection, sont parallèles à la ligne AZ ; l'angle demandé est compris dans un plan p'' perpendiculaire aux deux plans de projection, et se trouve rabattu en s'' suivant sa véritable grandeur.

171. Dans la figure **125**, l'intersection des plans donnés est parallèle au plan horizontal, mais cela ne change rien à la manière d'opérer.

172. On peut encore trouver l'angle de deux plans d'une autre manière.

Il est démontré en Géométrie que deux plans étant donnés, si, d'un point *pris où l'on voudra dans l'espace*, on abaisse des perpendiculaires sur ces plans, l'angle que ces perpendiculaires feront entre elles sera le même que l'angle des deux plans. D'après cela, étant donnés les deux plans p et p', **fig. 126**, on prendra un point quelconque ss', puis après avoir mené (103) par ce point des perpendiculaires (aa', bb') aux deux plans donnés, on cherchera (157) l'angle que ces deux droites feront entre elles.

173. Le point *ss'* peut être pris partout où l'on voudra; ce qui permet de rejeter cette opération dans un coin et même en dehors du cadre, si la place manquait dans les limites de l'épure.

174. *Construire l'angle qu'un plan donné fait avec les plans de projection.*

L'angle que le plan *p*, **fig. 127, pl. 21**, fait avec le plan horizontal, étant situé dans le plan vertical *p'*, on fera tourner ce plan autour de sa trace verticale jusqu'à ce que le point *s*, sommet de l'angle cherché, soit venu se placer en *s'* sur la ligne AZ ; ce qui donnera l'angle *h* pour l'inclinaison avec le plan horizontal.

De même, l'angle que le plan donné fait avec le plan vertical étant situé dans le plan *p''*, son sommet *u* se rabattra en *u'*, et l'angle *v* représentera l'inclinaison avec le plan vertical.

175. *Construire un plan faisant des angles donnés avec les plans de projection.*

On sait (*Géom.*) que si une droite et un plan sont perpendiculaires l'un à l'autre, les angles que cette droite et ce plan feront avec un autre plan sont compléments l'un de l'autre ; d'après cela, si l'on voulait construire un plan faisant avec les plans de projection des angles représentés, **fig. 129**, par *h* et par *v*, on construirait d'abord (165) la droite (*aa'*) faisant avec les plans de projection des angles *h'* et *v'*, compléments des angles donnés, puis on mènerait, **fig. 130**, un plan *p* perpendiculaire sur cette droite.

Si le plan devait être assujetti à passer par un point donné (*m*, *m'*), on emploierait la construction (113).

Nous avons vu (165) que par un point donné on pouvait faire passer quatre droites faisant, avec les plans de projection, des angles donnés ; il en résulte que l'on pourra pareillement faire passer par un point quatre plans faisant, avec les plans de projection, des angles donnés (*h*, *v*). Ces plans sont représentés, **fig. 130**, par *p*, *p'*, *p''*, *p'''* ; ils forment les quatre faces d'une pyramide quadrangulaire dont la section horizontale serait le losange *abcd*.

176. Nous avons vu encore (165) que la somme des angles qu'une droite fait avec les plans de projection ne peut jamais être plus grande qu'un angle droit. Ainsi, dans l'exemple présent, $v' + h'$ ne pouvant pas valoir plus d'un angle droit, la somme de leurs compléments $v + h$ ne peut pas être plus petite qu'un angle droit. Donc, pour que le problème que nous venons de résoudre soit possible, il faut que la somme des angles donnés soit plus grande, ou au moins égale à un angle droit : dans ce dernier cas, le plan cherché serait parallèle à la ligne AZ.

177. *Construire un plan passant par l'intersection de deux plans donnés, et qui partage l'angle qu'ils font entre eux en parties égales.*

Le plan demandé devant contenir la ligne (vh, $v'h'$), **fig. 131, 134**, qui représente l'intersection de deux plans donnés, sa trace horizontale doit passer par h, et sa trace verticale par v' (66). Il ne reste donc qu'à trouver un second point de l'une de ces traces : pour cela, on rabattra sur le plan horizontal l'angle asb que les deux plans donnés font entre eux, et l'on construira la droite su qui partage cet angle en deux parties égales. Le point u où cette droite perce le plan horizontal appartiendra à la trace horizontale du plan cherché. Après avoir construit cette trace hu, on fera passer la trace verticale par le point v', et l'on aura satisfait à la question.

En effet, les trois droites sa, su, sb, étant situées dans le plan p'' perpendiculaire à l'intersection commune des trois plans p, p', p''', les angles que ces lignes font entre elles mesurent les inclinaisons de ces trois plans (166) ; et puisque su partage l'angle asb en deux parties égales, le plan p''', qui contient su, partagera l'angle des deux autres plans aussi en parties égales.

Il est bon de remarquer que l'on n'a pas ramené la ligne su à sa place, parce qu'il suffisait (66) d'avoir le point où cette ligne perce le plan horizontal.

Nous avons partagé en deux parties égales l'angle obtus formé par les deux plans donnés ; on opérerait de la même

manière pour obtenir le plan p^{IV}, qui partage l'angle aigu en deux parties égales.

178. Les mêmes moyens seraient employés si l'on voulait partager l'angle de deux plans suivant tout autre rapport.

179. *Étant donnés un plan et une droite située dans ce plan, on veut faire passer par cette droite un second plan faisant avec le premier un angle donné.*

Soit, **fig. 132,** le plan donné p, la droite donnée (vh, $v'h'$) et l'angle donné A.

Le plan demandé devant contenir la droite (vh, $v'h'$), sa trace verticale passera par le point v' et sa trace horizontale par h. Pour avoir un autre point de cette dernière trace, on construira le plan p'' perpendiculaire sur la ligne donnée, qui doit être l'intersection du plan donné avec celui que l'on cherche, et après avoir rabattu sur le plan horizontal la ligne sa provenant de l'intersection du plan donné par le plan p'', on construira l'angle asu égal à l'angle donné A, et le point u sera un point de la trace horizontale du plan cherché. En effet, si l'on compare cette construction avec celle indiquée (166), il est facile de reconnaître que l'angle asu est égal à l'angle A, qui mesure l'inclinaison des plans p et p'.

En construisant l'angle aso, on obtiendrait en o un point de la trace horizontale d'un plan qui satisferait pareillement aux conditions demandées.

180. Dans la figure **133,** le plan p' partage en deux parties égales l'angle que le plan p fait avec le plan horizontal.

181. *Trouver le centre et le rayon d'une sphère dont la surface serait tangente à quatre plans donnés.*

Il est évident que cela revient à trouver un point également éloigné de ces quatre plans. Or, si par l'intersection de deux plans on en mène un troisième qui partage l'angle des deux premiers en parties égales, il est certain (*Géom.*) que tous les points de ce plan seront à égale distance des deux premiers, d'où résulte la construction suivante.

Soit p, p', p'', p''', **fig. 136, pl. 22,** les quatre plans donnés. On construira un plan p^{IV} qui partage en deux parties égales l'angle des plans p et p' (177). Ce plan contiendra le centre de la sphère cherchée ; on construira de la même manière le plan p^{V} qui partage en deux parties égales l'angle des plans p' et p''. Enfin le plan p^{VI}, qui partage en deux parties égales l'angle des plans p'' et p''', contiendra encore le point cherché que l'on obtiendra en cherchant l'intersection des trois plans p^{IV}, p^{V}, p^{VI} (79) ; quand on aura obtenu en (mm') le centre de la sphère, on abaissera de ce point une perpendiculaire sur l'un des plans donnés, et après avoir obtenu le pied de cette perpendiculaire, on en mesurera la longueur (105, 134) ; ce qui donnera le rayon avec lequel, des points (m, m') comme centres, on décrira deux cercles qui seront les projections verticale et horizontale de la sphère demandée.

En combinant les quatre plans donnés deux à deux de toutes les manières possibles, on obtient six combinaisons pp', pp'', pp''', $p'p''$, $p'p'''$, $p''p'''$. Si l'on partage en parties égales les angles formés par chacune de ces combinaisons, on aura six plans qui contiendront le plan cherché, et l'on choisira parmi ces six plans les trois qui donneront les constructions les plus simples.

182. Les quatre plans donnés forment, dans l'espace, une pyramide triangulaire ou *tétraèdre*. Or si l'on veut reconnaître parmi les plans qui partagent en parties égales les angles des plans donnés, quels sont ceux qui sont dirigés dans l'intérieur de la pyramide, on pourra opérer de la manière suivante.

On déterminera (79) **fig. 137 :**

1° Le point A provenant de l'intersection des trois plans p, p', p'' ;

2° Le point B, intersection des trois plans p, p', p''' ;

3° Le point C, intersection des trois plans p, p'', p''' ;

4° Enfin, le point D, intersection des trois plans p', p'', p'''.

Or, il est évident que le plan qui partage en deux parties égales l'angle des faces ABD, ABC, sera dirigé dans l'intérieur

du tétraèdre, s'il coupe l'arête CD entre les deux points C et D. Dans le cas contraire, il passera en dehors.

183. La question que nous venons de résoudre étant proposée ici comme sujet d'exercice, j'ai cru devoir supposer les plans donnés dans une position quelconque ; mais on pourrait, par un choix convenable de plans coordonnés, en rendre la solution plus simple.

En effet, plaçons horizontalement, **fig. 138, pl. 23,** l'un des quatre plans donnés, le plan p, par exemple, et prenons pour plan vertical de projection un plan perpendiculaire au plan p'; les lignes p'' et p''' étant les traces horizontales des deux autres plans donnés, et le point s, s' étant le sommet de la pyramide formée par les quatre plans, p^{IV} sera le plan qui partage en deux parties égales l'angle des plans p et p', et sa trace verticale contiendra la projection verticale du centre de la sphère demandée. L'angle des plans p et p'', situé dans le plan vertical sv, se rabattra en v'', et la ligne $v''o'$, qui partage cet angle en deux parties égales, rencontrera en o' la ligne verticale qui contient le point s, s'. L'angle des plans p et p''', projeté suivant su, se rabattra en u'' et sera partagé en deux parties égales par $u''h'$, qui rencontrera en h' la même verticale s, s'. Concevons maintenant (77) un plan auxiliaire q, parallèle au plan vertical de projection : ce plan contiendra en a' et o' deux points du plan p^{V}, qui partage en deux parties égales l'angle des deux plans p et p'' ; de sorte qu'il coupera ce plan suivant la droite $a'o'$. Par la même raison il coupera suivant $b'h'$ le plan p^{VI} qui partage l'angle des plans pp''' en parties égales ; de sorte qu'en joignant le point n, où les deux lignes $a'o'$ et $b'h'$ se coupent, avec le point c', intersection des traces horizontales des plans p'' et p''', qui sont les mêmes que celles des plans p^{V} et p^{VI}, on aura l'intersection de ces deux derniers plans ; et le point (m, m'), où cette intersection percera le plan p^{IV}, sera le centre de la sphère cherchée. Quant au rayon, il sera projeté en $m'd$ suivant sa véritable grandeur.

184. En partageant les angles dont l'ouverture est dirigée dans l'intérieur de la pyramide, nous avons obtenu la sphère

inscrite ; mais si nous avions partagé les angles extérieurs en parties égales par des plans, les intersections de ces plans auraient encore donné quatre points que l'on pourrait prendre pour les centres d'autant de sphères tangentes aux plans donnés, chacune de ces sphères toucherait en dehors l'une des faces de la pyramide, et les prolongements des trois autres faces. Les figures **139** et **142** contiennent les projections des cinq sphères tangentes intérieurement et extérieurement aux quatre faces d'un tétraèdre régulier.

185. Enfin il existe encore dans l'espace trois sphères qui satisfont à la question proposée. En effet, supposons, **fig. 143**, que ABCD soit le tétraèdre formé par les plans donnés. Si nous prolongeons les quatre faces au delà de l'arête AB, et si, pour plus de clarté, nous faisons abstraction des prolongements au delà de EFGH, nous aurons formé une espèce de coin ou *auge* dont le fond sera remplacé par l'arête AB, et qui aura pour faces :

1° Le quadrilatère ABFE prolongement du triangle ABD ;

2° Le triangle GBF prolongement de BCD ;

3° Le quadrilatère GBAH prolongement de BCA ;

4° Le triangle HAE prolongement de ACD.

Les plans bissecteurs BFO, BGO se couperont suivant une ligne BO, qui contiendra les centres de toutes les sphères tangentes aux trois plans ABFE, FBG, GBAH.

Les plans bissecteurs AEV, AHV se couperont suivant la droite AV qui contient les centres de toutes les sphères tangentes aux trois plans ABFE, EAH, HABG.

Les deux lignes BO et AV se rencontreront puisqu'elles sont situées dans le plan bissecteur de l'angle dièdre formé par les faces ABFE, ABGH ; et le point d'intersection de ces deux droites sera évidemment à égale distance des quatre faces du coin ABFEHG.

Or ce que nous avons dit pour l'arête AB pouvant s'appliquer à chacune des six arêtes du tétraèdre, cela semblerait indiquer qu'il existe encore six nouvelles sphères tangentes aux quatre plans donnés : mais ces six sphères se réduisent à *trois*, parce que les plans bissecteurs des six angles dièdres

formés par les faces de l'*auge* ou coin correspondant à l'arête AB, sont les mêmes que les plans bissecteurs des angles du coin correspondant à l'arête opposée DC ; et ces six plans passant tous par un même point, il en résulte que s'il y a une sphère tangente dans le premier coin, il n'y en aura pas dans le second et réciproquement. Ainsi, en résumant, la question admet huit solutions ; savoir :

1 sphère inscrite dans le tétraèdre ;

4 sphères inscrites dans les pyramides tronquées, formées par les prolongements des plans au delà des faces ;

3 sphères inscrites dans les coins formés par les prolongements des plans au delà des arêtes. Si le tétraèdre était régulier ces dernières sphères auraient leurs centres à l'infini.

Les relations précédentes étant plus curieuses que véritablement utiles, je me contenterai de les indiquer comme étude.

186. *Par une droite donnée faire passer douze plans faisant entre eux des angles égaux.*

Représentons la ligne donnée par (a, a'), **fig. 140, 141.** On sait déjà (63) que les traces des douze plans demandés doivent passer par les traces de la droite donnée ; il ne reste donc plus qu'à déterminer un point de chacun de ces plans. Pour y parvenir, on construira un plan p'' perpendiculaire sur la ligne donnée (a, a') qui doit être l'intersection commune de tous ces plans ; puis, au moyen de la construction indiquée (167), on rabattra sur le plan horizontal le point o, provenant de l'intersection de la ligne donnée par le plan p''. On mènera par le point o, ainsi rabattu sur le plan horizontal, douze lignes faisant entre elles des angles égaux, et le point où chacune de ces lignes ira couper la trace horizontale du plan p'' appartiendra à la trace horizontale de l'un des plans que l'on cherche ; car il est évident, **fig. 141**, que ces douzes lignes passant par le point o dans le plan p'', sont perpendiculaires à la ligne donnée ; de sorte que les angles que ces lignes font entre elles mesurent les inclinaisons des douze plans qui les contiennent. On n'a pas cherché quelles seraient les projections de ces douze droites si on les ramenait à leur véritable position dans l'espace, parce qu'il

suffisait (63) d'avoir les points où chacune de ces droites va percer le plan horizontal.

On n'a dû partager en douze parties égales que la moitié de la circonférence, parce que les prolongements des rayons auraient déterminé les mêmes plans.

ANGLE TRIÈDRE.

187. On donne en général le nom d'angle trièdre à l'espace compris entre trois plans.

Lorsque trois plans P P_1 P_2, **fig. 10, pl. 24**, se coupent dans l'espace, ils forment *huit angles trièdres*, qui ont tous le point S pour sommet.

Quatre de ces angles sont situés au-dessus du plan P, et les quatre autres sont situés au-dessous.

Pour simplifier la question, nous ne considérerons qu'un seul de ces huit angles trièdres.

Ainsi, par exemple, les droites SM, SN et SO qui aboutissent au point S, étant les intersections des trois plans P P_1 et P_2, nous pourrons négliger les *sept* angles trièdres formés par les prolongements de ces plans, et transporter, **fig. 7**, l'angle trièdre que nous nous proposons d'étudier.

Lorsque l'on considère ainsi un angle trièdre, indépendamment de ceux qui seraient formés par les prolongements des trois plans P P_1 et P_2, on donne le nom d'arêtes aux droites SM, SN, SO, suivant lesquelles ces plans se coupent.

On peut également, pour simplifier le langage, donner le nom de *faces* aux *trois angles plans* MSN, NSO, MSO, formés par les arêtes SM, SN, SO, le point S sera le sommet de l'angle trièdre.

La combinaison des faces avec les arêtes de l'angle trièdre donne lieu à *neuf* angles de trois espèces différentes, savoir :

1° Les trois *faces* ou *angles plans* MSN, NSO, MSO, formés par les arêtes, et qui ont le point S pour sommet commun ;

2° Les trois *angles dièdres* que les faces font entre elles ;

3° Les trois *angles* que chacune des arêtes fait avec la face qui lui est opposée.

Il existe entre les six premiers de ces neuf angles des relations telles, que toutes les fois que l'on connaît trois quelconques d'entre eux, on peut toujours trouver les trois autres. C'est la solution de cette question qui va nous occuper.

La recherche du problème proposé, par le calcul, forme ce que l'on appelle la trigonométrie sphérique.

En effet, on sait (*Géom.*) que l'angle dièdre formé par deux plans P et P_1, **fig. 1**, a pour mesure l'angle plan BAC formé par deux droites AB, AC tracées par un même point A dans chacun des plans donnés, et perpendiculaires à leur intersection SM.

Or, si l'on conçoit sur une sphère D, **fig. 3**, deux arcs de grands cercles AK, AH, on sait (*Géom.*) que l'angle formé par ces arcs est égal à l'angle formé par leurs tangentes AB, AC. Or, ces deux dernières lignes étant perpendiculaires à l'extrémité du rayon qui aboutit au point A, il s'ensuit que l'angle BAC sera la mesure de l'angle dièdre formé par les plans P et P_1 qui contiennent les deux arcs AK et AH, d'où il suit que *l'angle formé par deux arcs de grands cercles tracés sur une sphère est toujours égal à l'angle dièdre formé par les plans qui contiennent ces arcs* et réciproquement.

Mais, si nous supposons, **fig. 4**, que du point S comme centre et d'un rayon quelconque SA, on ait décrit les trois arcs AB, AC et BC, situés dans les faces de l'angle trièdre S,

Il est évident que ces trois arcs, ayant tous leurs points à égale distance du point S, seront situés sur la surface de la sphère qui aurait le point S pour centre, et la droite SA pour rayon.

De plus, les plans des trois arcs AB, AC et BC contenant le point S, il s'ensuit que ces arcs appartiennent à des grands cercles de la sphère (*Géom.*) et que le triangle ABC est ce que l'on appelle un *triangle sphérique*.

Or, en exprimant les angles de ce triangle A, B, C, on sait que les côtés opposés doivent être désignés par les petites lettres correspondantes, de sorte que l'arc BC opposé à l'angle A sera nommé *a*, l'arc AC sera *b* et l'arc AB sera *c*.

Mais il est évident que les arcs AB, AC et BC sont les mesures des angles plans ou faces, formés au centre de la sphère, par les trois arêtes de l'angle trièdre ; d'où il résulte

que les côtés a, b, c seront les mesures des trois angles BSC, ASC, ASB.

Si, de plus, on se rappelle ce que nous avons dit plus haut, que l'angle sphérique BAC ou A a la même mesure que l'angle dièdre formé par les plans ou faces ASB, ASC, que l'angle sphérique ABC ou B a la même mesure que l'angle dièdre formé par les faces ASB et BSC, et qu'enfin il en est de même de l'angle C, on comprendra pourquoi la notation adoptée pour désigner les six parties du triangle sphérique convient également pour désigner les parties correspondantes de l'angle trièdre.

Ainsi les trois lettres a, b, c exprimeront indifféremment les trois *angles plans* ou faces BSC, ASC, ASB, ou les trois côtés BC, AC et AB du triangle sphérique ABC.

Et les trois lettres A, B, C désigneront les trois angles dièdres formés par les faces a, b, c ou les trois angles correspondants du triangle sphérique.

Les considérations précédentes étant admises, nous rappellerons qu'il s'agit de résoudre graphiquement ce problème général.

Étant données trois quelconques des six quantités A, B, C, a, b, c, *d'un angle trièdre, trouver les trois autres.*

Cette question principale peut se décomposer en six questions particulières, suivant que les quantités données seront:

1° *Les trois faces ou angles plans ;*
2° *Deux faces et l'angle dièdre compris ;*
3° *Deux faces et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles ;*
4° *Deux angles dièdres et la face qui leur est commune ;*
5° *Deux angles dièdres et la face opposée à l'un d'eux ;*
6° *Les trois angles dièdres.*

188. Premier problème sur l'angle dièdre. *Étant données les trois faces* a, b, c, *trouver les angles dièdres* A, B *et* C.

Solution, fig. 2, pl. 24 :

1° On placera les angles donnés ou faces m'SN, NSO, OSm'' à côté les unes des autres, comme on le voit sur la figure **2**, et l'on prendra une distance quelconque Sm' = Sm' que l'on

portera à droite et à gauche du point S, sur les deux côtés extérieurs des angles plans ou faces *a* et *c*.

2° On fera tourner l'angle plan ou face *a* autour de l'arête SN, pour ramener cette face à la position qu'elle doit occuper dans l'espace. Le point *m'* décrira un arc de cercle dont le plan sera perpendiculaire à l'arête SN, et dont la projection sur le plan de la face *b* sera *m'm*.

3° On fera tourner également l'angle plan ou face *c* autour de l'arête SO et le point *m''* décrira un arc de cercle qui aura pour projection la droite *m'm*.

4° Quand les deux faces *a* et *c* seront revenues à la place qu'elles doivent occuper dans l'espace, les deux points *m'* et *m''* qui sont à égale distance du point S seront réunis en un seul et même point que nous nommerons M, et ce point devant être situé en même temps dans les deux plans *m'm* et *m''m* fera partie de leur intersection, qui, étant perpendiculaire au plan de la face *b*, se projettera sur ce plan par le point *m*.

5° L'angle trièdre étant reformé, l'angle *dièdre* C qui exprime l'inclinaison des faces *a* et *b* aura son sommet au point *u* sur l'arête SN et sera projeté sur le plan de la face ou angle plan *b* par la droite *um* qui sera l'un de ses côtés.

6° Si l'on fait tourner le plan de cet angle C autour du côté *um*, la perpendiculaire abaissée du point M de l'espace sur le plan de la face *b* se rabattra suivant *mm'''*, et le point M viendra occuper la position *m'''*, que l'on déterminera en écrivant du point *u* comme centre, l'arc de cercle *m'm'''* dont le rayon $um' = um'''$ sera le second côté de l'angle cherché C.

7° Une construction analogue déterminera l'angle A rabattu sur le même plan dans la position mvm^{IV}.

8° Pour obtenir l'angle B, on concevra, par le point M de l'espace, un plan perpendiculaire à l'arête SM. Ce plan, qui contiendra l'angle B, **fig. 4**, coupera la face *a* suivant une droite perpendiculaire à l'arête SM et représentée sur la figure **2** par *m'*N perpendiculaire à S'. Ce même plan qui contient l'angle B coupera la face *c* suivant la droite *m''*O perpendiculaire sur l'arête S*m''*, et la face *b* suivant NO; de sorte que les trois droites *m'*N, NO et O*m''* seront les trois côtés du triangle au sommet duquel se trouve l'angle B, que l'on con-

naîtra en construisant le triangle MOm^{v}, dans lequel on a $Nm^{v}=Nm'$ et $Om^{v}=Om''$.

189. Remarques. Si l'une des trois faces, la face b, par exemple, était égale à la somme des deux autres, le point m serait situé sur l'arc de cercle $m'rm''$, les angles A et C seraient nuls, l'angle B vaudrait deux angles droits, et les deux faces a et c coïncidant avec le plan b, l'angle trièdre serait réduit à un plan.

Si c'était la face a qui fût égale à la somme des deux autres, le point m viendrait coïncider avec m'', les angles C et B seraient nuls. L'angle A vaudrait deux angles droits, et l'angle trièdre serait réduit encore à un plan.

Enfin, s'il y avait dans les données quelque condition d'impossibilité, elle se manifesterait toujours par la construction de l'épure.

Ainsi, par exemple, si la face b était plus grande que la somme des deux autres faces a et c, le point m tomberait en dehors de la circonférence $m'rm''$ et le triangle mum''' deviendrait impossible, puisque le côté mu de l'angle droit serait plus grand que l'hypoténuse $um''' = um'$.

Il en serait de même du triangle mvm^{iv}, puisque l'on aurait mv plus grand que vm^{iv}.

L'impossibilité du triangle m NO serait encore mise en évidence, parce que le côté NO serait plus grand que la somme des deux droites Nm' et Om''.

J'indique aux élèves cette discussion comme sujet d'exercices, et je les engage à changer la grandeur des données, afin de reconnaître ce qui doit arriver dans toutes les hypothèses.

190. Vérification. La figure **2** contenant les trois faces et les angles dièdres peut être considérée comme l'expression complète de toutes les relations qui existent entre ces six quantités.

On peut donc comparer cette figure à une formule générale au moyen de laquelle, lorsqu'on connaîtra trois quelconques des six éléments de l'angle trièdre, on pourra toujours retrouver les trois autres.

Mais avant de passer à la solution de cinq problèmes qui nous restent à résoudre, je ferai quelques remarques importantes.

En examinant avec attention la figure **2**, on reconnaîtra cinq vérifications principales :

1° Les angles S*um*, S*vm* étant droits, les sommets *u* et *v* doivent être situés sur la circonférence du cercle qui a pour diamètre S*m*, de sorte que le quadrilatère S*umv* sera toujours inscriptible dans un cercle (*Géom.*);

2° Les droites m''' et mm^{IV} doivent être égales entre elles, puisqu'elles représentent toutes les deux la perpendiculaire abaissée du point M de l'espace sur le plan de la face *b*, d'où il résulte que les deux points m''' et m^{IV} doivent être situés sur un même arc de cercle $m'''m^{\text{IV}}$ décrit du point *m* comme centre ;

3° Les droites SN et mm''' perpendiculaires toutes deux sur $m'm$ sont parallèles entre elles, et les droites mm^{IV}, SO sont également parallèles, puisqu'elles sont toutes deux perpendiculaires sur mm''.

Il résulte de là que l'angle $m'''m^{\text{IV}}$ sera égal à l'angle *b*, puisque les côtés de ces deux angles sont parallèles chacun à chacun ;

4° Si l'on considère la face *b* comme un plan de projection, la droite NO sera la trace du plan qui contient l'angle B, et ce plan étant perpendiculaire sur l'arête SM de l'espace, la trace NO sera perpendiculaire sur S*m*, qui est la projection de la droite SM sur la face *b* ;

5° Si le triangle m^{V}NO, qui est construit dans sa véritable grandeur, était ramené à la place qu'il doit occuper dans l'espace, la droite NO ne changerait pas de place, et le point m^{V}, ramené en M sur l'intersection des faces *a* et *c*, serait projeté en *m* sur le plan de la face *b*; l'arc de cercle décrit par le point M serait perpendiculaire sur la droite NO, et la projection mm^{V} de cet arc devrait alors se confondre avec la projection S*m* de SM sur le plan de la face *b*, d'où il résulte que le point m^{V}, qui représente le point M rabattu, doit toujours être situé sur la droite S*m*.

191. Deuxième problème sur l'angle trièdre. *Étant*

donnés deux angles plans ou faces, et l'angle dièdre compris, trouver la troisième face et les deux angles dièdres.

Solution. Pour obtenir un moyen de vérification, nous allons résoudre les six problèmes de l'angle dièdre avec les mêmes données, de sorte qu'en considérant comme quantités connues trois quelconques des six angles A, B, C, a, b, c de la figure **2**, on doit toujours retrouver les trois autres pour la valeur des inconnues.

Par conséquent, si nous prenons pour données dans le problème actuel les faces a et b, et l'angle dièdre C de la figure **2**, nous devons retrouver les angles désignés sur la même figure par c, A et B.

1° Pour y parvenir, on placera d'abord les deux faces ou angles plans donnés a et b à côté l'un de l'autre, comme on le voit sur la figure **2**, puis on prendra le point m' à volonté, sur le côté extérieur de la face a ;

2° La perpendiculaire abaissée du point m' sur l'arête SN, donnera en u le sommet de l'angle C, et puisque la valeur de cet angle est donnée par la question, que de plus on sait que um'' doit être égal à um', on décrira l'arc de cercle $m'm'''$, et l'on construira le triangle rectangle $m'''um$, ce qui déterminera le point m ;

3° On abaissera de ce point la droite mv perpendiculaire sur l'arête SO, et l'arc de cercle $m'rm''$ déterminera le point m'', sur le prolongement de la droite mv, de sorte qu'en joignant m'' avec le point S, la face c sera connue.

4° Les angles A et B s'obtiendront comme dans le problème précédent qui ne diffère du problème actuel que par l'ordre des opérations.

192. Troisième problème sur l'angle trièdre. *Étant donnés deux faces et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles, trouver la troisième face, et les deux autres angles dièdres.*

Solution, fig. 1, pl. 25. Les données étant a, c et C, on construira :

1° La face ou angle plan a, sur l'un des côtés duquel on prendra le point m' à volonté ;

2° La perpendiculaire $m'u$, abaissée du point m' sur le second côté SN de la face v, déterminera le point u, sommet de l'angle donné C ;

3° On construira l'angle mum''' égal à l'angle donné C, et l'on fera le côté um''' égal à um' ;

4° La droite $m'''m$, perpendiculaire sur le prolongement de $m'u$, déterminera le point m, projection du point M sur le plan de la face b ;

5° On tracera la droite Sm, et prenant cette droite comme diamètre, on décrira la circonférence qui doit contenir le point v, sommet de l'angle A ;

6° Pour déterminer le point v, on construira le triangle rectangle m'SV, dont on connaît l'hypoténuse Sm' et l'angle aigu m'SV égal à l'angle plan c, qui est donné par la question ;

7° Du point S comme centre et du rayon SV, on décrira un arc de cercle qui déterminera le point v, sommet de l'angle A sur la circonférence qui a pour diamètre Sm ;

8° On joindra le point v avec S, et l'angle vSu sera égal à la face b cherchée ;

9° On prolongera la droite mv, et du point S comme centre, on décrira l'arc de cercle $m'rm''$, ce qui déterminera le point m'' ;

10° On joindra m'' avec le point S, et si l'on a bien opéré, l'angle m''Sv doit être égal à l'angle donné c ;

11° Les trois faces ou angles plans, a, b, c, étant alors connus et disposés comme dans les épures précédentes, le reste n'offrira plus aucune difficulté.

Il est évident que l'angle vSm'' est égal à l'angle VSm', par conséquent à la face c, que l'on avait portée à gauche de la face a, en attendant que la face b soit déterminée.

On pourrait même, si l'on avait peu de place, construire partout ailleurs le triangle VSm', qui n'a pas d'autre but que de faire connaître SV, c'est-à-dire la distance du point S au point v de la circonférence Sumv.

193. Remarque. La circonférence qui a pour diamètre la

droite Sm est coupée en deux points v et x par l'arc de cercle Vvx.

Il résulte de là que l'on pourrait prendre le point x pour sommet de l'angle dièdre cherché A, que nous désignerons ici par A″, et qui serait alors obtus au lieu d'être aigu, comme cela aurait lieu si l'on prenait son sommet au point v.

Ainsi, les données admises, a, c et C conviennent à deux angles trièdres différents ; et le problème actuel correspond au cas de géométrie plane où l'on donne deux côtés (a, c) d'un triangle, et l'angle C opposé à l'un d'eux, **fig. 2.**

Pour distinguer les parties des deux angles trièdres qui satisfont à la question, je mettrai deux accents à la droite de celles des parties du second angle qui diffèrent par leur grandeur, ou par leur position, des parties correspondantes du premier. Ainsi, en réservant la lettre A pour l'angle qui a son sommet en v, nous désignerons par A″ celui qui a son sommet en x, et nous remarquerons que ces deux angles diffèrent par leur position et par leur grandeur, puisque l'un d'eux est aigu et l'autre obtus.

Le premier, rabattu sur l'épure, devient mvm^{IV}, tandis que le second est rabattu en $m^{\text{VII}}x$Z.

Dans l'angle trièdre pour lequel le point v serait le sommet de l'angle dièdre A, la face ou angle plan b sera uSv, et la face c projetée sur le plan de la face b par le triangle vSm sera rabattue en vSm''.

Tandis que si l'on choisit le point x pour sommet de l'angle dièdre A″, la face c remplacée par c'' sera projetée sur le plan de la face b par le triangle xSm et rabattue en xSm^{VI}, les deux faces c'' et c sont égales et ne diffèrent que par leur position.

Dans ce dernier cas, l'angle plan ou face b du premier angle trièdre sera remplacé par l'angle NSO′ que je nommerai b'' et l'angle dièdre B, ou, ce qui est la même chose, Nm^{V}O deviendra Nm^{V}O′, qui est désigné sur l'épure par B″.

Le plan qui contient ce dernier angle, ainsi que l'angle B, coupera les trois faces du second angle trièdre, suivant les droites m'N, NO′ et O′m^{VI}, qui sont les trois côtés du triangle NO′m^{V}, au sommet m^{V} duquel se trouve l'angle B″ cherché.

Ainsi, les six parties du premier angle trièdre seront a, b, c, A, B, C, tandis que les parties du second seront a, b'', c'', A'', B'', C.

La face a et l'angle dièdre C sont les seules parties communes aux deux angles trièdres.

La face c'' du second est égale à la face c du premier, et ces quantités ne diffèrent entre elles que par leur position.

L'angle dièdre A du premier est le supplément de l'angle A'' du second.

Les angles b'' et B'' du second angle trièdre sont situés dans les mêmes plans que les faces b et B du premier, et ces quantités ne diffèrent entre elles que par leurs grandeurs.

194. Angle trièdre supplémentaire. Avant de passer à la solution des trois problèmes qui nous restent à résoudre, je rappellerai quelques théorèmes de géométrie élémentaire qui se rapportent aux propriétés de l'angle trièdre.

1°, **fig. 5, pl. 24.** Si par un point A pris à volonté dans l'espace, on conçoit les droites AB, AC perpendiculaires sur les plans P et P_1 *l'angle* BAC *que les deux droites font entre elles sera supplément de l'angle dièdre* COB *formé par les deux plans*, et réciproquement, *l'angle dièdre formé par les plans* P *et* P_1 *sera le supplément de l'angle plan formé par les deux droites* AB, AC.

2°, **fig. 8.** Si par un point S' pris à volonté dans l'espace, on abaisse une perpendiculaire sur chacune des trois faces SMN, SMO, SON d'un angle trièdre S, on pourra considérer ces trois droites SO', SN', SM' comme les arêtes d'un second angle trièdre S' dont les faces S'M'N', S'O'N', S'N'O' seront perpendiculaires aux trois arêtes SN, SM, SO du premier : d'où il résulte par le théorème cité précédemment, *que les angles plans ou faces de l'un de ces angles trièdres seront les suppléments des angles dièdres correspondants du second, et que les faces ou angles plans du second seront les suppléments des angles dièdres du premier.* Ainsi, en exprimant par A, B, C, a, b, c, les six éléments de l'angle trièdre qui a son sommet en S et par A', B', C', a', b', c' les six éléments du second angle trièdre, on aura toujours les équations

$A + a' = 180°$	$a + A' = 180°$
$B + b' = 180°$	$b + B' = 180°$
$C + c' = 180°$	$c + C' = 180°$

Pour rappeler cette propriété, on dit en géométrie que les deux angles trièdres S et S′ sont supplémentaires l'un de l'autre.

195. Si les trois sommets A, B, C d'un triangle sphérique, **fig. 6**, sont les pôles de trois côtés d'un second triangle tracé sur la même sphère, on sait (*Géom.*) que les sommets du second triangle seront les pôles des côtés qui leur sont opposés dans le premier, et qu'en outre *les côtés de l'un quelconque de ces deux triangles seront les suppléments des angles qui leur sont opposés dans le second, de sorte* que les six équations ci-dessus auront encore lieu entre les six parties A, B, C, a, b, c du premier triangle et les six parties A′, B′, C′, a', b', c' du second.

La coïncidence qui existe, entre les deux théorèmes que nous venons de citer, provient de ce que, si le triangle ABC de la figure **6** était la base d'une pyramide triangulaire qui aurait son sommet au centre de la sphère, le triangle A′B′C′ serait la base d'une seconde pyramide qui aurait le même sommet que la première, mais dont les arêtes seraient perpendiculaires sur les plans des grands cercles qui forment les côtés du triangle ABC : de sorte que le troisième théorème ne différerait pas du second, si l'on faisait coïncider le point S′ de la figure **8** avec le point S, et si l'on remplaçait les trois arêtes S′O′, S′M′, S′N′ par leurs prolongements comme on le voit sur la figure **11**.

Les deux triangles sphériques de la figure **6** résulteraient alors des intersections de la surface d'une sphère qui aurait pour centre le sommet commun aux deux angles trièdres, par les six plans qui en forment les faces.

La figure **9** de la planche **24** est le développement de l'angle trièdre supplémentaire de celui qui avait été choisi pour sujet de la figure **2**, de sorte que tous les angles de la figure **9** sont remplacés sur la figure **9** par leurs suppléments.

Il résulte de là que les six parties de l'angle trièdre, **fig. 2**, étant aigues, leurs suppléments, **fig. 9**, sont obtus ; mais cela ne change rien à la manière de résoudre le problème ; les opérations sont absolument les mêmes et doivent être exécutées dans le même ordre, la position des points ou des lignes obtenues fait toute la différence des deux épures. J'engagerai donc le lecteur a exécuter sur la figure **9** toutes les opérations qui ont été indiquées au n° 188 pour la figure **2**.

Pour rendre ce travail plus facile, j'ai désigné par les mêmes lettres tous les points et lignes correspondants des deux figures.

On remarquera cependant que les six parties de ce nouvel angle trièdre sont désignées par des lettres accentuées. De sorte que, pour reconnaître sur la figure **9**, toutes les opérations qui ont été indiquées plus haut pour la figure **2**, il suffira de remplacer les quantités a, b, c, A, B, C, par a', b', c', A′, B′, C′.

Toutes les vérifications qui ont été indiquées au n° 190, pour la figure **2**, auront également lieu sur la figure actuelle.

Ainsi la circonférence qui a Sm pour diamètre contiendra les points u et v.

Les points m''' et m^{IV} seront situés sur un même arc de cercle décrit du point m comme centre.

L'angle $m'''mm^{\text{IV}}$ sera égal à l'angle plan ou face b'.

La droite NO sera perpendiculaire à Sm. Et cette dernière droite contiendra le point m^{V} qui est le sommet de l'angle dièdre B′.

196. Quatrième problème ramené au second par les suppléments. Les principes rappelés au n° 194 permettront de ramener la solution des trois derniers problèmes à celle des trois premiers ; en effet, supposons pour le quatrième problème que les données soient les deux angles dièdres A, B et la face c, qui leur est commune, on construira, **fig. 15, 16** et **14** :

1° $180° - A = a'$;
2° $180° - B = b'$;
3° $180° - c = C'$.

Il est évident, alors, que la question est ramenée au deuxième problème, pour lequel on connaissait les deux faces a, b et l'angle dièdre compris C, de sorte qu'il ne reste plus qu'à exécuter mot à mot, avec les nouvelles données, toutes les constructions indiquées au numéro 191 pour les données a, b et C.

Puis, lorsqu'on aura obtenu c' A′ et B′, on aura

1° $180° - c' = C$;
2° $180° - A' = a$;
3° $180° - B' = b$.

Ainsi, étant données A, B et c, on aura trouvé C, a et b.

Je ferai seulement remarquer que si les angles donnés A, B, c sont aigus, leur supplément a', b', et C′ seront obtus, ce qui donnera la figure **9** au lieu de la figure **2** que l'on avait obtenue pour la solution du deuxième problème ; mais cela ne changera rien à l'ordre des opérations.

197. Deuxième solution du quatrième problème de l'angle trièdre. *Étant donnés deux angles dièdres et la face qui leur est commune, trouver les deux autres faces et le troisième angle dièdre.*

Les données étant b, A et C, **fig. 2**, on construira :

1° L'angle $m'''mm^{IV}$ égal à l'angle plan donné b (190) ;

2° Le triangle rectangle $mm'''u$ pour lequel on connaît un côté mm''' dont la grandeur peut être prise à volonté, et l'angle donné C ;

3° Le triangle rectangle $mm^{IV}v$ dont on connaît le côté mm^{IV} égal à mm et l'angle donné A ;

4° Les deux droites Su et Sv parallèles aux côtés mm''' et mm^{IV} de l'angle $m'''mm^{IV}$ détermineront le point S et l'angle uSv égal à b.

Cela étant fait, il ne restera plus aucune difficulté ; ainsi :

5° Le triangle rectangle Sum', dont on connaît le côté Su et le côté $um' = um'''$, déterminera l'angle plan ou face a ;

6° Le triangle rectangle svm''' dont on connaît Sv, et le côté $vm'' = vm^{IV}$ déterminera l'angle plan c.

7° Enfin l'angle B se construira comme dans les premier et deuxième problèmes.

198. Cinquième problème ramené au troisième par les suppléments.

Les données étant A, C et c, on construira, **fig. 15, 17** et **14** :

1° $180° - A = a'$;
2° $180° - C = c'$;
3° $180° - c = C'$;

et la question sera évidemment ramenée au troisième problème, pour lequel les données étaient les faces a, c, et l'angle dièdre C opposé à l'une d'elles.

Il ne restera donc plus qu'à exécuter avec les nouvelles données a', c' et C' toutes les opérations indiquées au n° 192, pour les données a, c et C ; puis, lorsqu'on aura obtenu b' A' et B', on aura

1° $180° - b' = B$;
2° $180° - A' = a$;
3° $180° - B' = b$.

Ainsi, connaissant A, C et c, on aura trouvé B, a et b.

Je n'ai pas tracé, sur la figure **9**, les constructions indiquées au numéro 192, parce que la solution que nous allons donner est beaucoup plus simple.

199. Deuxième solution du cinquième problème de l'angle trièdre. *Étant donnés deux angles dièdres et la face opposée à l'un d'eux, trouver les deux autres faces et le troisième angle dièdre.*

Les quantités données étant A, C et a, on construira, **pl. 25, fig. 3** :

1° L'angle donné a sur l'un des côtés duquel on prendra un point quelconque m' ;

2° La perpendiculaire abaissée de ce point m', sur le second côté SN de l'angle a, déterminera le point u, sommet de l'angle donné C ;

3° On construira le triangle rectangle mum''', dont on connaît l'angle C, et l'hypoténuse um''' égale à um' ;

4° On tracera la droite mS, et sur cette droite, comme diamètre, on décrira la circonférence qui doit contenir le point v, sommet de l'angle A donné ;

5° Pour déterminer la place du point v sur la circonférence qui a Sm pour diamètre, on construira le triangle rectangle mVm''', dont on connaît le côté mm''' de l'angle droit, et l'angle mVm''' égal à l'angle donné A ;

6° Du point m comme centre, avec une ouverture de compas égale à mV, on décrira l'arc de cercle Vv, ce qui déterminera la position du point v sur la circonférence qui a Sm pour diamètre ;

7° On joindra le point v avec S, et l'angle uSv sera la face ou angle plan b ;

8° Dès que la face b sera connue, on déterminera l'épure en opérant comme pour le deuxième problème.

200. Sixième problème ramené au premier par les suppléments.

Étant donnés les trois angles dièdres A, B *et* C, *trouver les trois angles plans ou faces* a, b, c.

Solution. On construira, **fig. 15, 16** et **17, pl. 24 :**

1° $180° - A = a'$;
2° $180° - B = b'$;
3° $180° - C = c'$.

La question se trouve alors ramenée au premier problème, pour lequel on connaissait les trois faces a, b, c.

Ainsi, en exécutant sur la figure **9** avec les nouvelles données a', b', c', toutes les opérations indiquées au numéro 188, pour les données a, b, c, on obtiendra les trois triangles dièdres A′, B′, C′, dont les suppléments a, b, c seront les quantités demandées.

201. Deuxième solution du sixième problème.

Concevons, **fig. 8, pl. 26**, un cône circulaire dont la géné-

ratrice OA ferait, avec le plan P, un angle V ; il est évident (*Géom.*) que tout plan, tel que P_1, qui serait tangent au cône, ferait également un angle V avec le plan P. D'après cela, étant donnés les trois angles dièdres A, B et C :

1° Concevons, **fig. 1**, un plan de projection perpendiculaire à la droite, suivant laquelle se coupent les plans P et P_1 qui contiennent les deux faces *a* et *c* que l'on veut obtenir. L'angle donné B sera projeté sur ce plan dans sa grandeur réelle ;

2° Si par un point O, pris à volonté dans l'intérieur de l'angle *msn*, on conçoit la droite O*u*, faisant avec le plan P l'angle C donné, cette droite O*u*, tournant autour de O*q* perpendiculaire au plan P, engendrera un cône circulaire O*tz*, et tout plan tangent à ce cône fera avec le plan P, par conséquent avec la face *a*, un angle dièdre égal à l'angle C donné ;

3° Si par le point O on conçoit une seconde droite O*v*, faisant avec le plan P_1 l'angle A donné par la question, cette droite O*v* tournant autour de O*g*, perpendiculaire au plan P_1 engendrera un second cône circulaire O*ie*, et tout plan tangent à ce dernier cône fera avec le plan P_1, et par conséquent avec la face *c*, un angle dièdre égal à l'angle A donné ;

4° Il est donc évident que tout plan qui sera tangent aux deux cônes O*tz* et O*ie* contiendra la face *b*, puisqu'il coupera le plan P ou la face *a*, suivant l'angle C et le plan P_1 ou la face *c*, suivant l'angle A.

5° Pour construire un plan tangent aux deux cônes O*tz* et O*ie*, il faudra se rappeler un théorème connu dont voici l'énoncé:

Si l'on conçoit, **fig. 9**, *qu'une sphère soit pénétrée par un cône, de manière que l'une des courbes de pénétration* TZ *soit un cercle, la seconde courbe* IE *sera pareillement circulaire* (206).

Réciproquement, *si deux cercles* TZ, IE *sont situés sur la même sphère, on pourra toujours concevoir une surface conique qui les contiendra tous deux* (207) ;

6° Ce qui précède étant admis, si l'on trace sur la figure première les deux droites *ti* et *ze*, le point *x*, suivant lequel ces deux droites se rencontreront, sera le sommet d'un cône qui contiendra les deux cercles *tz* et *ie*, de sorte que si l'on joint le point *x* avec le point O, sommet commun des deux

premiers cônes, la droite xO sera l'intersection de deux plans qui toucheront en même temps les trois cônes, et qui pourront être pris, l'un ou l'autre, pour la face b demandée, puisqu'ils couperont le plan P ou la face a suivant l'angle donné C et le plan P_1 ou la face c suivant l'angle donné A ;

7° De ce que, par la droite Ox, on peut mener deux plans tangents aux trois cônes, il semblerait qu'il peut exister deux angles dièdres satisfaisant aux conditions données : mais ces deux angles étant placés symétriquement par rapport au plan de projection que l'on a choisi, et les parties symétriquement placées étant égales chacune à chacune, nous ne considérerons pas ces deux angles trièdres comme deux solutions différentes, et nous ne prendrons que les parties de l'angle trièdre situé au-dessus du plan de projection qui contient le point O ;

8° Pour obtenir les faces a, b, c, nous supposerons que les plans P et P_1 qui contiennent ces faces se renversent l'un à gauche et l'autre à droite de l'épure, tandis que le plan tangent aux trois cônes se rabat autour de la droite mn, qui contient les sommets x et O ;

9° Dans ce mouvement, les points m et n ne changeront pas de place; la circonférence décrite du point q, comme centre, sera l'intersection du cône Otz, par le plan P et la tangente ms', sera l'intersection du plan P, qui contient la face a, par le plan qui est tangent aux trois cônes, et qui contient la face b ;

10° La circonférence décrite du point g comme centre est l'intersection du cône Oie par le plan P_1 et la tangente ns'' est la droite suivant laquelle le plan P_1 qui contient la face c, est coupé par le plan de la face b ;

11° Les droites ss' et ss'' perpendiculaires, la première sur ms et la seconde sur ns, doivent être égales entre elles, puisque chacune d'elles représente la perpendiculaire abaissée du point S de l'espace sur le plan de la projection B.

Cette perpendiculaire est l'intersection des deux plans P et P_1 ;

12° Enfin, les droites $s'm$, mn et ns'' sont les trois côtés du triangle, au sommet duquel se trouve l'angle $ms'''n$ égal à la face demandée b, que l'on suppose ici rabattue sur l'épure en tournant autour de la droite mn;

13° Dans ce mouvement, le point S de l'espace décrit un arc de cercle projeté sur le plan de l'épure, par la droite ss''', qui par conséquent doit être perpendiculaire sur mn.

Remarque. Si le point x était trop éloigné, ou si les deux droites ti et ze se coupaient trop obliquement, on tracerait :

1° La droite $t'z'$ parallèle à tz ;
2° La droite $t'o'$ parallèle à tO ;
3° La droite $z'o'$ parallèle à zO.

On déterminerait ainsi le point o' homologue du point O, et la droite Oo' passerait par le point x qui est le centre de similitude des deux triangles tzO, $t'z'o'$ (*Géom.*).

202. Troisième solution du sixième problème.

On peut éviter l'emploi du cône qui a son sommet en x, en opérant de la manière suivante :

1° Les données étant les mêmes que pour le problème qui précède, on disposera l'épure comme sur la figure **1**, c'est-à-dire que l'on prendra, **fig. 3**, un plan de projection perpendiculaire aux plans P et P_1 qui contiennent les faces demandées a et c. L'angle msn sera par conséquent égal à l'angle B donné ;

2° On choisira un point O quelconque, situé où l'on voudra dans l'intérieur de l'angle msn, et de ce point comme centre, on décrira un cercle que l'on pourra considérer comme la projection d'une sphère dont le rayon Or peut être pris à volonté;

3° On construira la tangente xu, qui fait avec le plan P l'angle donné C ; puis, faisant tourner cette tangente autour de la droite qx perpendiculaire au plan P, on engendrera un cône circonscrit à la sphère du rayon Or, et tous les plans tangents à ce cône feront évidemment l'angle C avec le plan P et par conséquent avec la face a qui coïncide avec ce plan ;

4° On construira ensuite la tangente zv, qui fait avec le plan P_1 un angle svz égal à l'angle donné A; puis, faisant tourner cette tangente autour de la droite zg, perpendiculaire au plan P_1, on engendrera un second cône circonscrit à la sphère, et tous les plans tangents à ce deuxième cône feront l'angle A avec le plan P_1 et par conséquent avec la face c qui est située dans ce plan ;

5° Il est donc évident qu'il ne reste plus pour obtenir la face b qu'à construire un plan tangent aux deux cônes.

Pour y parvenir on tracera successivement :

6° La droite zx qui contient les sommets des deux cônes, et qui perce les plans P et P_1 aux points m et n ;

7° La circonférence décrite du point q, comme centre avec le rayon uq, sera la section du premier cône par le plan P qui contient la face a ;

8° La tangente ms' sera l'intersection du plan P de la face a, par le plan qui est tangent aux deux cônes, et qui doit contenir la face b ;

9° La droite ss', perpendiculaire sur ms, sera l'intersection des plans P et P_1 ou, ce qui est la même chose, des faces a et c ;

10° L'angle $ms's$ sera par conséquent égal à la face demandée a ;

11° La circonférence décrite du point g comme centre avec le rayon gv, sera la section du second cône par le plan P_1 de la face c ;

12° La tangente ns'' sera l'intersection du plan P_1 de la face c, par le plan de la face b, qui est tangent aux deux cônes ;

13° La droite ss'' perpendiculaire sur ns doit être égale à ss', puisque ces deux lignes, ramenées à leur place, n'en feraient qu'une seule projetée par le point s, et provenant de l'intersection des faces a et c ;

14° L'angle $n'ss$ sera égal à la face demandée c ;

15° Enfin, les trois droites $s'm$, mn et ns'' seront les trois côtés du triangle au sommet duquel est situé l'angle $ms'''n$ égal à la face b cherchée ;

16° L'angle $ms'''n$ représentant la face b rabattue sur le plan de l'épure, la droite ss''', projection de l'arc de cercle parcouru par le point S de l'espace, doit par conséquent être perpendiculaire sur la droite mn autour de laquelle se fait le rabattement.

203. Théorème. Concevons, **fig. 4,** deux plans P et P_1 situés d'une manière quelconque dans l'espace ;

Concevons de plus une droite AB perpendiculaire à l'un des deux plans donnés, au plan P_1 par exemple ;

Si par la droite AB nous concevons le plan ABC, perpendiculaire sur la droite CS intersection des deux plans P et P_1, le plan ABC coupera les deux plans P et P_1 suivant les droites BC et CA ; l'angle BCA sera l'angle dièdre formé par les deux plans P et P_1 et l'angle ABC mesurera l'inclinaison de la droite AB sur le plan P ;

Or, la droite BA étant perpendiculaire sur le plan P_1, le triangle BAC est rectangle en A, et les deux angles B et C sont compléments l'un de l'autre.

Par conséquent, si l'on veut construire un plan P_1 faisant avec le plan P un angle donné ACB, on pourra opérer de la manière suivante :

1° On tracera une droite quelconque AB faisant avec le plan P un angle ABC, complément de l'angle donné ACB ;

2° On construira un plan P_1 perpendiculaire à la droite AB.

204. Quatrième solution du sixième problème.

Les principes qui précèdent donnent une solution extrêmement simple pour le sixième problème de l'angle trièdre. En effet, supposons, **fig. 7**,

1° Que la face demandée *b* coïncide avec le plan horizontal de projection que je désignerai par P ;

2° Construisons le plan P_1 perpendiculaire au plan vertical de projection, et faisant avec le plan P l'angle $m's'z$ égal à l'angle dièdre donné A. Le plan P_1 contiendra la face *c* qui est une des quantités cherchées.

Il ne restera plus qu'à construire un troisième plan faisant l'angle C avec le plan P et l'angle B avec le plan P_1 ;

3° Pour obtenir ce résultat, on construira d'abord,

Figure **5**, l'angle c'', complément de l'angle C donné, et

Figure **6**, l'angle b'', complément de l'angle B qui est également connu ;

4° On tracera ensuite sur la figure **7** les droites $s'o''$ et $s'o'''$, de manière que l'angle $o''s'z$ soit égal à l'angle c'' de la figure **5**, et que l'angle $o'''s'm'$ soit égal à l'angle b'' de la figure **6** ;

5° Les deux droites $s'o''$ et $s'o'''$ étant situées dans le plan

vertical de projection, auront la ligne AZ pour projection horizontale commune ;

6° Si l'on fait actuellement tourner $s'o''$ autour de la droite $s'v$, qui est perpendiculaire au plan P de la face b, on engendrera un cône circulaire dont la génératrice $s'o''$ fera toujours l'angle c'' avec le plan P de la face b ;

7° Si l'on fait ensuite tourner $s'o'''$ autour de la droite $s'x$, qui est perpendiculaire au plan P_1 de la face c, on engendrera un second cône circulaire dont la génératrice $s'o'''$ fera toujours l'angle b'' avec le plan P_1 de la face b ;

8° Or, les deux cônes engendrés par les droites $s'o''$ et $s'o'''$ ayant le point s' pour sommet commun, se couperont suivant une génératrice commune, qui fera l'angle c'' avec le plan P de la face b, et l'angle b'' avec le plan P_1 de la face c ;

9° Pour obtenir un second point de cette génératrice, qui contient le point s', on décrira de ce point, comme centre, un arc de cercle quelconque hy ;

10° Cet arc peut être considéré comme appartenant à la projection verticale d'une sphère qui coupera le cône engendré par $s'o''$, suivant un cercle projeté sur le plan vertical par $o''o'$;

11° La même sphère coupera le cône engendré par $s'o'''$, suivant un cercle parallèle au plan P_1 et projeté sur le plan vertical par la droite $o'''o'$;

12° Les deux cercles $o''o'$ et $o'''o'$ étant situés sur la même sphère se rencontreront en un point, dont la projection verticale sera o', et dont la projection horizontale o sera située sur la projection horizontale de l'arc de cercle décrit par le point o'' ;

13° Joignant le point s' avec les deux points o et o', on obtiendra les droites $s'o$, $s'o'$ pour les deux projections de la génératrice commune aux deux cônes ;

14° Si l'on construit actuellement un plan P_2 perpendiculaire à la droite $s'o$, $s'o'$ que l'on vient d'obtenir, il résulte évidemment de ce que nous avons dit (203), que ce plan P_2 coupera le plan P de la face b suivant un angle C, complément de c'', qui exprime l'inclinaison de la droite $s'o$, $s'o'$ sur le plan P, et que par la même raison l'angle formé par les

plans P_1 et P_2 sera égal à l'angle B, complément de l'angle b'' que la droite $s'o$, $s'o'$ fait avec le plan P_1 ;

15° Le plan P_2 contiendra donc la face demandée a, et les trois plans P, P_1 et P_2 formeront les trois faces de l'angle trièdre dont le sommet sera situé au point S sur le plan horizontal de projection.

16° Il ne restera plus, pour obtenir les trois faces demandées a, b, c, qu'à développer l'angle trièdre en faisant tourner les plans P_1 et P_2 autour de leurs traces horizontales.

Dans ce mouvement, le point m' tournant avec la face c, viendra se placer en m''' sur la ligne AZ, et le même point tournant avec la face a, se rabattra en m'' que l'on obtiendra en construisant le triangle rectangle zrm'' dont on connaît le côté de l'angle droit zr et l'hypoténuse zm'' égale à zm' (152).

205. Problème, fig. 10. *Étant données les trois faces* a, b, c *d'un angle trièdre, on demande les angles que chacune des arêtes fait avec la face qui lui est opposée.*

Solution. Pour faciliter l'explication de l'épure, j'exprimerai par X l'angle que l'arête Sv fait avec la face a qui lui est opposée ; par Y, l'angle que l'arête Su fait avec la face opposée c, et par Z, l'angle que l'arête SM de l'espace fait avec la face opposée b, qui coïncide ici avec le plan de la figure.

Nous rappelons d'abord (*Géom.*) que l'angle qui mesure l'inclinaison d'une droite sur un plan est égal à l'angle que cette droite fait avec sa projection sur le plan dont il s'agit. Ainsi, **fig. 4,** si l'on voulait avoir l'angle que la droite BC fait avec le plan P_1 il faudrait :

1° Construire BA perpendiculaire sur P_1 ;

2° Déterminer les points A et C ;

3° Tracer la droite AC ;

4° Mesurer l'angle ACB.

D'après cela, si par le point k de la droite Su, **fig. 10,** on conçoit une perpendiculaire sur le plan P_1 de la face c, cette perpendiculaire, rabattue autour de kv, deviendra ko ; de sorte que, si l'on ramène la droite kS en ks''' au moyen de l'arc Ss''', décrit du point k comme centre, la droite os''' sera la projection de ks''' sur le plan de la face c, et l'angle $ks'''o$ = X

exprimera l'inclinaison de l'arête S*k* sur le plan de la face *c* qui lui est opposée ; une opération analogue déterminera l'angle Y que l'arête S*v* fait avec la face opposée *a*. En effet, si par le point *h* de l'arête S*v* on conçoit une perpendiculaire sur le plan P_2 de la face *a*, cette perpendiculaire rabattue autour de *hu* deviendra *he* ; de sorte que, si l'on ramène la droite *h*S en *hs''* en décrivant l'arc de cercle *ss''* du point *h*, comme centre, la droite *es''* sera la projection de l'arête *hs* sur le plan de la face *a*, et l'angle *hse* = Y exprimera l'inclinaison de l'arête S*h* sur le plan de la face *a* qui lui est opposée.

La construction, pour avoir l'angle Z, sera encore plus simple. En effet, si l'on se rappelle, que dans toutes les figures précédentes, la droite S*m* est la projection de la droite SM de l'espace sur le plan de la face *b* qui lui est opposée, il est évident qu'en ramenant *m*S dans la position *ms'* perpendiculaire à *mm'''*, la droite *s'm'''* représentera la droite SM de l'espace ; *ms'* sera égale à la projection de SM sur le plan de la face *b*, et l'angle *m'''s'm* = Z exprimera l'inclinaison de l'arête SM de l'espace sur le plan de la face *b* qui lui est opposée.

Si au lieu des trois faces on connaissait quelques-unes des autres parties de l'angle trièdre, on commencerait par chercher les faces, et l'on agirait ensuite comme nous venons de le dire.

206. Le problème qui précède complète évidemment la solution de tous les problèmes dont le but serait de déterminer les relations qui résultent de l'intersection de trois plans, et quoique nous n'ayons étudié qu'un seul des huit angles trièdres qui sont représentés sur la figure **10** de la planche **24**, il n'en est pas moins vrai que l'une quelconque des épures précédentes suffira toujours pour faire connaître toutes les parties des huit angles qui ont le point S pour sommet commun, puisque celles de ces parties qui ne sont pas égales aux éléments de l'angle trièdre que nous avons étudié en sont nécessairement les suppléments.

Ainsi, en exprimant comme nous l'avons fait au numéro 187, l'angle MSN par *a*, l'angle NSO par *b* et l'angle OSM par *c* ;

appelant en outre les suppléments de ces trois angles A′, B′, C′.

Les faces des angles trièdres en commençant par les quatre qui sont situées en deçà du plan P_1 et tournant de N en M, la **fig. 10,** seront :

1er	*a*, *b*, *c*,
2e	A′, B′, *c*,
3e	B′, C′, *a*,
4e	A′, C′, *b* ;

et pour les quatre angles situés derrière le plan P_1 on aura en tournant dans le même sens :

5e	B′, C′, *a*,
6e	A′, C′, *b*,
7e	*a*, *b*, *c*,
8e	A′, B′, *c*.

On remarquera que les angles opposés par le sommet sont composés des mêmes faces ou angles plans disposés dans un ordre symétrique.

207. Problème. *Étant donnés les angles que deux droites font avec la verticale, et l'angle que ces mêmes droites font entre elles, on demande de construire l'angle formé par leurs projections horizontales.*

Solution. On pourra considérer les deux droites dont il s'agit, et la verticale, comme les trois arêtes d'un angle trièdre dont on construira le développement, **fig. 2, pl. 26.**

La face *a* sera l'angle que l'une des deux droites *s′m″* fait avec la verticale *s′s*.

La face *b* sera l'angle que cette verticale fait avec la seconde droite *s′*U.

Enfin la face *c* sera l'angle que les droites obliques *s′*M, *s′*U font entre elles.

Les droites *s′m″* et *s′m‴* sont égales puisqu'elles représentent toutes deux la droite SM de l'espace.

L'angle trièdre étant développé, **fig. 2,** il ne reste plus

qu'à ramener les faces *a* et *c* à la place que chacune d'elles doit occuper dans l'espace. On obtiendra par ce moyen l'angle C pour la projection horizontale de l'angle *c* que les droites SM et SU font entre elles.

On dit alors que l'angle que les deux droites données font entre elles est *ramené à l'horizon.*

208. Théorème. Pour résoudre, au numéro 201, le sixième problème de l'angle trièdre, nous avons appliqué un théorème dont on trouve la démonstration dans les traités d'analyse, mais on peut démontrer facilement ce théorème par la géométrie élémentaire.

En effet, **fig. 9,** un cercle qui a pour diamètre TZ étant situé sur une sphère quelconque, si l'on prend à volonté le point X pour sommet d'un cône qui aurait pour directrice la circonférence du cercle TZ, il s'agit de prouver *que la courbe* IE, *suivant laquelle le cône perce la surface de la sphère, est également un cercle.*

Pour y parvenir, nous prendrons comme plan de projection: le plan du grand cercle qui contient le point X, le centre O de la sphère, et le centre C du cercle TZ.

Ce plan de projection contenant la ligne droite CO sera perpendiculaire au plan du cercle donné TZ, dont la projection se réduira par conséquent à son diamètre TZ.

Les génératrices TX et ZX du cône seront situées dans le plan de projection, et la droite IE sera une corde du grand cercle TZEI.

Le cône sera du second degré, puisque la courbe directrice TZ est un cercle.

Or, si nous concevons par la droite IE un plan perpendiculaire au grand cercle TZEI, la section du cône par ce plan sera une courbe que nous pourrons admettre provisoirement comme une ellipse, en admettant que nous ayons prouvé qu'elle est circulaire.

Le plan du grand cercle TZEI est un plan de symétrie par rapport au cône, puisqu'il contient le sommet X, et qu'il est perpendiculaire au plan du cercle directeur TZ, dont il contient le centre.

De plus, le plan P étant perpendiculaire au plan de projection TZX, il s'ensuit que la courbe IE sera coupée par ce plan en deux parties symétriques, et que la droite IE sera l'un des axes principaux de l'ellipse.

Cela étant admis, concevons par un point quelconque de la courbe IE un plan P_1 parallèle au plan du cercle TZ, la section du cône par le plan P_1 sera un cercle, puisque les deux sections parallèles TZ et HK doivent être semblables (*Géom.*).

Mais, le quadrilatère TZEI étant inscrit dans un cercle, l'angle TZU sera égal à l'angle H$I m$ comme ayant le même supplément CZE.

L'angle CZU est égal à l'angle mKE comme correspondants, d'où il suit que les angles H$I m$ et mKE sont égaux entre eux, puisqu'ils sont tous les deux égaux à l'angle CZU.

De plus, les angles ImH, KmE sont égaux comme opposés par le sommet ; par conséquent, les triangles ImH et mKE sont semblables, et l'on a la proportion :

$$\mathrm{H}m : m\mathrm{E} = \mathrm{I}m : m\mathrm{K}, \qquad \text{d'où}$$

$$(1) \qquad \mathrm{H}m \times m\mathrm{K} = m\mathrm{E} \times \mathrm{I}m ;$$

or, la courbe HK, semblable à TZ, est une circonférence de cercle, et si nous exprimons par y la perpendiculaire abaissée sur le plan de projection par le point de rencontre des deux courbes HK et IE, nous aurons (*Géom.*) :

$$(2) \qquad y^2 = \mathrm{H}m \times m\mathrm{K}.$$

Multipliant l'équation (1) par (2) et réduisant, on aura :

$$y^2 = m\mathrm{E} \times \mathrm{I}m;$$

donc, puisque l'ordonnée du point m est moyenne proportionnelle entre les deux segments Im et mE, il s'ensuit que la section du cône par le plan P est un cercle qui a pour diamètre la droite IE.

Mais ce même cercle sera évidemment la section de la sphère par le plan P. Donc le cercle IE, situé en même temps sur le cône et sur la sphère, sera l'intersection de ces deux surfaces.

209. Réciproque du théorème prédédent. *Deux cercles* TZ *et* IE *étant situés sur une sphère, on peut toujours concevoir une surface conique qui les contiendrait tous les deux.*

Pour le démontrer, concevons comme ci-dessus la sphère projetée sur le plan du grand cercle TZIE qui contient les centres des deux cercles TZ et IE.

Les projections de ces deux cercles se réduiront alors à leurs diamètres, et si l'on prolonge les droites TI et ZE, on obtiendra un point X situé dans le plan du grand cercle qui contient les quatre points TZEI.

Supposons actuellement que le point X soit pris pour sommet du cône dont les génératrices s'appuieraient sur le cercle TZ, je dis que le cercle IE sera situé sur la surface de ce cône.

En effet, concevons une génératrice quelconque XM, et désignons par m le point suivant lequel la projection de cette génératrice rencontre la projection du cercle IE.

Si par le point m on conçoit un plan P_1 parallèle à celui qui contient le cercle TZ, ce plan coupera le cône suivant un cercle KH, puisque les sections du cône par les deux plans parallèles TZ et HK doivent être semblables.

Or, si par le point m, nous concevons une droite perpendiculaire au plan de projection, cette ligne rencontrera les deux cercles IE et HK en deux points que nous supposerons différents jusqu'à ce qu'il soit démontré que ces deux points coïncident, et si nous exprimons par y l'ordonnée du cercle IE, nous aurons (*Géom.*) :

$$(1) \qquad y^2 = Im \times mE;$$

mais si nous exprimons par Y l'ordonnée du cercle HK, nous aurons également :

$$(2) \qquad Hm \times mK = Y^2.$$

De plus, la similitude des triangles ImH, mKE donnera, comme ci-dessus :

$$(3) \qquad Im \times mE = Hm \times mK.$$

Or, si l'on ajoute ou si l'on multiplie entre elles les équations (1), (2) et (3), on aura après toutes réductions :

$$y^2 = Y^2,$$

d'où l'on peut évidemment conclure que les cercles IE de la sphère, et HK du cône, se coupent en un point qui est projeté en *m* sur le plan du grand cercle TZEI.

Il résulte de là que la génératrice XM du cône s'appuie sur les deux cercles TZ et IE.

On démontrerait de la même manière que toutes les génératrices du cône, qui a pour directrice la circonférence du cercle TZ, rencontrent celle du cercle IE ; d'où l'on peut conclure que les circonférences TZ, IE sont situées sur la surface du cône qui a le point X pour sommet.

210. Tout ce que nous venons de dire peut être appliqué facilement au cas où le sommet du cône serait pris entre les plans des deux cercles TZ et IE.

211. Enfin, il est évident que le théorème s'applique également au cas où les deux cercles TZ et IE seraient égaux, ce qui éloignerait le point X jusqu'à l'infini, et changerait par conséquent le cône en un cylindre.

Ainsi, *lorsque l'une des courbes de pénétration d'une sphère par un cylindre est un cercle, la seconde courbe de pénétration est également circulaire.*

212. Problème. *Trois points étant donnés, on veut déterminer un quatrième point dont on connaît les distances aux trois premiers.*

Exprimons les points donnés par M, N, V, **pl. 27**, et le point cherché par U. Supposons de plus que l'on doit avoir MU = 7 *mètres* ; VU = 8 *mètres* et NU = 9 *mètres;* il est évident que la question revient à construire le quatrième sommet d'un tétraèdre qui aurait pour base le triangle MNV et dont les arêtes adjacentes au point U seraient égales aux trois distances données. Pour y parvenir, on pourra opérer de la manière suivante :

1° On déterminera les traces du plan P qui contient les trois points donnés ;

2° On projettera ces trois points m'', n'', v'' sur un plan auxiliaire A″Z″ perpendiculaire à la trace horizontale du plan P;

3° On rabattra le plan P sur l'épure, et les trois points donnés seront m''', n''', v''';

4° On construira les deux faces $n'''\ v'''\ u^{\text{IV}}$ et $m'''\ n'''\ u^{\text{V}}$ en faisant $v'''\ u^{\text{IV}} = 8$ *mètres*; $n'''\ u^{\text{IV}} = n'''\ v^{\text{V}} = 9$ *mètres* et $m'''\ u^{\text{V}} = 7$ *mètres*;

5° On ramènera les deux faces $n'''\ v'''\ u^{\text{IV}}$ et $n'''\ m'''\ u^{\text{V}}$ à leur place en les faisant tourner autour des arêtes $n'''\ v'''$ et $n'''\ m'''$ (188), ce qui donnera u''' pour la projection du point cherché sur le plan P rabattu;

6° L'arc de cercle que décrit u^{V} en tournant autour du point o étant rabattu en $u^{\text{V}}\ u^{\text{VI}}$, la droite $u'''\ u^{\text{VI}}$, perpendiculaire sur $u'''\ u^{\text{V}}$, sera la hauteur du tétraèdre, et, par conséquent, la distance du point cherché au plan qui contient les trois points donnés;

7° On projettera le point u''' sur la droite A‴Z″, d'où on le ramènera en u^{VII} sur A‴Z‴ par un arc de cercle décrit du point A‴ comme centre;

8° On fera passer par ce point u^{VII} une perpendiculaire à A‴Z‴, et, par conséquent, au plan P, et l'on portera sur cette perpendiculaire les deux distances $u^{\text{VII}}\ u''$ égales à $u'''\ u^{\text{VI}}$. Cette opération déterminera sur le plan A″Z″ les projections u'', u'' de deux points qui satisfont à la question proposée;

9° Les projections horizontales u, u de ces mêmes points seront situées sur les perpendiculaires abaissées sur A″Z″ par les deux points $u''\ u''$, et sur la droite menée par u''' perpendiculairement à la trace horizontale du plan PA‴Z‴;

10° Enfin, les projections verticales $u'u'$ des deux points demandés pourront être obtenues sur les perpendiculaires uu', uu' en faisant les hauteurs des points u' au-dessus de A′Z′ égales aux hauteurs des points u'', au-dessus de A″Z″.

Si l'on a bien opéré, la droite $u'u'$ doit être perpendiculaire à la trace verticale du plan P.

213. Problème. *Construire une droite connaissant les angles suivant lesquels cette ligne coupe deux autres droites données.*

Solution. Si les droites données étaient situées dans un

même plan, il est évident qu'elles se rencontreraient, et la droite demandée, n'étant pas située dans le plan de ces droites, ne pourrait les couper toutes les deux qu'autant qu'elle passerait par leur point d'intersection.

Dans ce cas, les deux droites données et la droite cherchée seraient les trois arêtes d'un angle trièdre dont les faces ou angles plans seraient les deux angles donnés, et l'angle connu que les droites données font entre elles.

Ces trois angles étant placés à côté les uns des autres, il ne restera plus qu'à reformer l'angle trièdre (188), et les projections de la droite demandée dépendront de la position des droites données dans l'espace.

Nous allons d'abord résoudre cette première question, nous verrons ensuite ce qu'il faudrait faire si les droites données n'étaient pas situées dans un même plan.

214. Premier cas, fig. 1, pl. 28. *Les droites* sN, sO *étant situées dans le plan horizontal de projection, il s'agit de construire une droite qui rencontre la droite* sN *suivant l'angle donné* a *et la droite* sO *suivant l'angle* c.

Solution. Par le point s suivant lequel se coupent les deux droites données sN et sO, on tracera les droites sm'' et sm''', de manière que l'angle $m''s$N soit égal à l'angle donné a et que l'angle $m'''s$O soit égal à l'angle c, de sorte que si nous exprimons par b l'angle connu que les deux droites sN et sO font entre elles, les trois angles a, b, c seront les faces de l'angle trièdre qui aurait pour arêtes les droites données sN, sO, et la droite demandée rabattue en sm'' avec la face a, et en sm''' avec la face c.

Or, il est évident que si l'on reforme l'angle trièdre, en faisant tourner la face ou angle plan a autour de sN et la face c autour de sO, jusqu'à ce que les deux droites sm'' et sm''' soient réunies en une seule, cette dernière ligne sera la droite demandée dont la position dans l'espace sera déterminée.

Les deux points m'' et m''' se réuniront en un seul point M dont la projection horizontale m sera déterminée par la rencontre des droites $m''u$ et $m''v$ (188).

Ces deux lignes perpendiculaires, la première sN et la

seconde sur $s0$, sont les projections des arcs de cercle décrits par les points m'' et m''' lorsqu'on ramène les faces a et c à la place que chacune d'elles doit occuper dans l'espace.

La projection horizontale sm étant déterminée, on rabattra le cercle $vm^{IV}m'''$ que décrit le point m''' en revenant à sa place, et l'ordonnée mm^{IV} sera la hauteur du point M au-dessus de la face b ; de sorte qu'en faisant dm' égal à mm^{IV}, le point m' sera la projection verticale du point M et les droites sm, $s'm'$ seront par conséquent les deux projections de la ligne demandée.

215. Remarque. Lorsque l'on fait tourner la face a pour la ramener à la place qu'elle doit occuper dans l'espace, l'arête sm'' engendre la surface du cône circulaire qui a pour axe la droite sN, et pour base ou section droite le cercle parcouru par le point m'' et projeté sur le plan horizontal par la droite $m''u$.

Lorsque l'on ramène à sa place la face ou angle plan c, la droite sm''' engendre la surface du second cône circulaire qui a pour axe la droite $s0$ et pour la base le cercle projeté par la droite vm''' et rabattu par $vm^{IV}m'''$.

Or, les deux cercles $m''u$, $m'''v$ étant situés tous les deux sur la sphère qui a pour rayon sm'', il est évident qu'ils se coupent suivant *deux points* qui ont le point m pour projection horizontale commune, et les deux cônes ayant le point s pour sommet commun, se coupent suivant deux droites qui ont toutes les deux sm pour projection horizontale.

Il existe donc *deux droites* qui satisfont à la condition demandée, et pour distinguer ces deux lignes nous désignerons l'une d'elles par s-1 et la seconde par s-2.

En faisant d-2 égal à mm^{IV}, on obtiendra la projection verticale s'-2 de la seconde droite.

Pour éviter la confusion, je n'ai tracé en ligne pleine, sur la projection verticale de chacune des deux lignes trouvées, que la partie de cette ligne qui est au dessus du plan horizontal de projection.

C'est pour la même raison que je n'ai pas mis d'accents pour les projections verticales des points qui sont désignés par des chiffres, les accents placés au dessus des lettres suf-

fisant pour faire distinguer les projections des lignes correspondantes.

216. En examinant avec attention la figure **2**, on reconnaîtra facilement que les deux cônes n'ont pas d'autres génératrices communes que les deux droites S-1 et S-2.

Mais si la somme des deux angles donnés, **fig. 3**, était plus grande que l'angle obtus OSN que les deux droites SN et SO font entre elles, ou en d'autres termes, si la somme des trois faces $(a + b + c)$ de l'angle trièdre était plus grande que deux angles droits, la base ou section droite de l'un des deux cônes rencontrerait en quatre points les deux cercles du même diamètre situés sur le deuxième cône, d'où il résulte que les deux cônes ayant quatre génératrices communes, il y aurait alors quatre droites S-1, S-2, S-3, S-4, satisfaisant aux conditions demandées.

217. Si la somme des angles donnés était égale à l'angle obtus NSO que font entre elles les deux droites données, les deux cônes, **fig. 4**, seraient tangents suivant une droite S-3 qui serait située dans le plan qui contient les deux droites données ; cette droite S-3 remplacerait les deux droites S-3 et S-4 de la figure **3**, lesquelles droites seraient alors réunies en une seule par suite de la condition en vertu de laquelle les deux cônes seraient tangents l'un à l'autre.

Mais indépendamment de la droite S-3 suivant laquelle se touchent les deux cônes, **fig. 4**, ils se couperaient encore suivant deux droites S-1 et S-2, de sorte que, dans le cas actuel, il y aurait trois droites qui satisfont à la question proposée.

218. Si la somme des angles donnés M″SN, M‴SO, **fig. 9**, était égale à l'angle aigu NSO que les deux droites données font entre elles, ou en d'autres termes, si la somme des faces $(a + c)$ était égale à la face b, les deux cônes ne se couperaient pas, mais ils se toucheraient suivant la droite SM, située dans le plan de deux lignes données. Il n'y aurait alors qu'une seule droite satisfaisant aux conditions demandées.

219. La même chose aurait lieu si l'angle a était égal à $b + c$, ou, ce qui revient au même, si l'angle b était égal à $a - c$; mais alors l'un des cônes toucherait l'autre intérieurement, comme on le voit sur la figure **8**.

220. Enfin, on doit se rappeler que le problème serait impossible si l'un quelconque des trois angles a, b ou c était plus grand que la somme des deux autres (*Géom.*), de sorte que si nous exprimons par b l'angle aigu que les deux droites données font entre elles, et si nous supposons que a soit le plus grand des deux angles, on doit toujours avoir b plus petit que $a + c$ et plus grand que $a - c$.

Ce qui précède étant admis, nous allons choisir comme études quelques-uns des cas les plus intéressants de la question proposée.

221. Deuxième cas. *Les droites données* sN, sO, **fig. 5**, *sont situées, comme précédemment, dans le plan horizontal de projection*, mais la somme des angles donnés $m''s$N, $m'''s$O étant plus grande que l'angle obtus NsO, il existe quatre droites qui satisfont aux conditions du problème.

Pour les obtenir on construira :

1° Les projections horizontales des cônes engendrés par les droites sm'', sm''' ;

2° Les projections horizontales s-1, s-2, s-3, s-4 des quatre droites suivant lesquelles les deux nappes du premier cône coupent les deux nappes du second ;

3° On rabattra le cercle décrit par le point m'', et les ordonnées mm^{IV}, $m^{\text{V}}m^{\text{VII}}$ seront les distances des points 1, 2, 3, 4, au plan horizontal qui contient les deux droites données ;

4° On fera les droites m'-1, m'-3 égales à mm^{IV} et les droites m^{VI}-4, m^{VI}-2 égales à $m^{\text{V}}m^{\text{VII}}$;

5° On joindra le point s' avec les points 1, 2, 3, 4, ce qui donnera les projections verticales des quatre droites qui satisfont aux conditions données.

222. Troisième cas. *Les droites données,* **fig. 7**, *étant situées dans un plan* P, *perpendiculaire au plan vertical de projection,* on opérera de la manière suivante :

1° On rabattra le plan P sur l'épure en le faisant tourner autour de sa trace horizontale ;

2° On construira sur ce plan P rabattu, les projections des cônes engendrées par les droites $s''m''$, $s''m'''$;

3° La somme des deux angles donnés $m''s''$N, $m'''s''$O étant plus grande que l'angle obtus Ns''O formé par les droites données, on obtiendra pour réponse les quatre droites s''-1, s''-2, s''-3, s''-4, projetées par $s''m$ et $s''m^{v}$;

4° En ramenant le plan P à sa place, les points m et m^{v} viendront se projeter en m' et m^{vi} ;

5° On rabattra le cercle $m'''m^{vii}m^{vi}v$ que décrit le point m''' en tournant autour de la droite s''O ;

6° Les ordonnées mm^{iv}, $m^{v}m^{vii}$ seront les distances des points 1, 2, 3, 4 au plan P ;

7° On portera ces distances sur les droites menées par les points m' et m^{vi} perpendiculairement au plan P ;

8° En joignant les quatre points obtenus par cette dernière opération, avec le point s', on aura les projections verticales des quatre droites demandées ;

9° Les projections horizontales des points 1, 2, 3, 4 seront déterminées par la rencontre des perpendiculaires abaissées de la projection verticale sur la ligne AZ, avec les droites menées parallèlement à la ligne AZ par les projections des mêmes points sur le plan P rabattu.

223. Quatrième cas. *Les droites données,* **fig. 10,** *étant encore situées dans un plan* P *perpendiculaire au plan vertical de projection,* la disposition de l'épure sera la même que pour le problème précédent.

Mais la somme des angles donnés $m''s''$N, $m'''s''$O étant égale à l'angle obtus Ns''O que les deux droites données font entre elles, on n'obtiendra pour réponse que les trois droites s''-1, s''-2, s''-3.

La dernière de ces trois lignes étant située dans le plan P, sa projection verticale devra coïncider avec la trace verticale de ce plan.

Tout le reste se fera comme pour le problème qui précède. Ainsi, le cercle décrit par le point m''', étant rabattu sur l'é-

pure, l'ordonnée mm^{IV} déterminera sur la projection verticale les distances des points 1 et 2 au plan P.

224. *Si les droites données étaient situées dans un plan perpendiculaire au plan horizontal,* il est évident qu'il suffirait de faire sur le plan vertical toutes les opérations que l'on vient de faire sur le plan horizontal et réciproquement.

225. Cinquième cas. *Les droites données,* **fig. 6**, *étant situées dans un plan incliné quelconque,* on devra opérer de la manière suivante : on construira (132)

1° Le plan auxiliaire de projection YAZ′, sur lequel on déterminera la troisième trace du plan P et la troisième projection s'' du point S suivant lequel se rencontrent les deux droites données SN et SO ;

2° Les projections $s''n''$ et $s''o''$ de ces deux droites sur le plan Y′AZ′, se confondront avec la troisième trace du plan P ;

3° On fera tourner ce plan P autour de sa trace horizontale jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le plan horizontal de projection ;

Dans ce mouvement, le point S de l'espace se rabattra en s''' et les droites données deviendront $s'''n'''$, $s'''o'''$;

4° On obtiendra la première de ces deux lignes en construisant les projections successives x, x'' et x''' d'un quelconque de ses points ;

5° Pour la droite $s'''o'''$ on joindra s''' avec le point z qui est situé sur la trace horizontale du plan P, et qui par conséquent n'a pas changé de place ;

6° Les droites données étant rabattues avec le plan P, sur le plan horizontal de projection, on exécutera successivement toutes les opérations nécessaires pour déterminer les projections des cônes engendrées par les droites $s'''m''$ et $s'''m'''$, tournant autour des deux lignes données, et la somme des angles donnés $m''s'''n'''$, $m'''s'''o'''$ étant plus grande que l'angle obtus $n'''s'''o'''$, on obtiendra quatre points comme dans les deuxième et troisième problèmes ;

7° Les projections des points 1, 2, 3 et 4 étant déterminées

sur le plan P rabattu, on ramènera ce plan à sa place, et les deux points m et m^{v} deviendront m' et m^{vi} ;

8° On rabattra le cercle décrit par le point m'' et les ordonnées mm^{iv}, $m^{v}m^{vii}$ seront les distances des points cherchés au plan P qui contient les deux droites données ;

9° On fera les distances m'-1 et m'-3 égales à l'ordonnée mm^{iv}, et les distances m^{vi}-2, m^{vi}-3, égales à $m^{v}m^{vii}$, ce qui déterminera les projections des points 1, 2, 3 et 4 sur le plan auxiliaire Y'AZ' ;

10° Les projections horizontales des mêmes points seront déterminées par les perpendiculaires à la droite AZ' abaissées de leurs projections sur le plan Y'AZ', jusqu'à la rencontre des droites menées perpendiculairement à la trace horizontale du plan P par les projections des mêmes points sur le plan P rabattu.

Ces dernières lignes seront les projections des arcs de cercle décrits par les points demandés lorsqu'on les ramène à la place qu'ils doivent occuper dans l'espace ;

11° Pour déterminer les projections verticales des quatre points, on tracera par la projection horizontale de chacun d'eux une perpendiculaire à la ligne AZ et la hauteur de la projection verticale de ce point au dessus de la ligne AZ sera égale à la hauteur du point correspondant sur le plan auxiliaire de projections Y'AZ' ;

12° Les points 1, 2, 3, 4 étant déterminés, il ne restera plus qu'à les joindre avec le point de rencontre des deux lignes données, et l'on obtiendra les quatre droites qui satisfont aux conditions du problème.

226. Sixième cas. Nous avons supposé, dans les problèmes qui précèdent, que les droites données étaient situées dans un même plan. Lorsque cette condition n'aura pas lieu, le problème sera un peu plus composé.

Pour le résoudre, on décomposera la question de la manière suivante :

1° On déterminera d'abord quelle doit être la direction de la ligne demandée ;

2° On cherchera quelle doit être la position de cette droite dans l'espace.

227. *Première opération.* Déterminer la direction de la droite demandée.

1° Étant données, **fig. 3, pl. 29**, les deux droites A et B, situées comme l'on voudra dans l'espace, on choisira un point quelconque S sur l'une des deux lignes données sur la droite A, par exemple ;

2° On fera passer par le point S une droite parallèle à la droite B ;

3° Les droites A et C étant situées toutes les deux dans le plan P, il sera facile, en opérant comme dans les exemples qui précèdent, de construire une droite SM faisant avec A un angle donné *a* et avec la droite C un angle donné *c*.

Or, la droite C étant parallèle à B, il s'ensuit que toute parallèle à SM, qui couperait la droite B, ferait avec cette dernière ligne un angle égal à l'angle donné *c*.

Il est donc évident que la droite SM est parallèle à la ligne demandée et que par conséquent la direction de cette dernière ligne est déterminée.

228. *Deuxième opération.* Déterminer la position que la droite demandée doit occuper dans l'espace.

Cette seconde partie du volume peut être résolue de plusieurs manières.

229. *Première méthode,* **fig. 3.**

1° Par les droites A et SM, on fera passer un plan P_1 ;

2° On déterminera le point Z suivant lequel le plan P_1 coupe la droite B ;

3° La droite ZR, parallèle à SM, sera la ligne demandée.

En effet, cette ligne rencontrera évidemment les deux droites données A et B, et puisqu'elle est parallèle à SM, elle sera inclinée par rapport aux droites A et B comme la droite SM par rapport aux droites A et C. On agira de la même manière pour chacune des droites qui satisferont aux conditions du problème.

230. *Deuxième méthode.*

1° La droite MS, **fig. 7**, étant déterminée par les opéra-

tions indiquées précédemment, on fera passer par la droite B un plan P_1 parallèle à P ;

2° On déterminera le point U suivant lequel ce plan P_1 coupe la droite SM ;

3° On tracera par le point U une droite UZ parallèle à la ligne donnée A. Cette opération déterminera le point Z ;

4° On fera passer par le point Z la droite ZR parallèle à SM et la question sera résolue ;

5° Il est bien entendu qu'il faudra recommencer cette opération pour chacune des droites qui satisferont aux conditions du problème.

231. Épure. Les principes précédents ont été appliqués sur les figures **2, 4, 5** et **6**.

Voici quelles sont les opérations successives que l'on doit faire pour obtenir les lignes demandées :

1° Les droites données A et B étant déterminées par leurs projections *aa'* et *bb'*, **fig. 2** et **5**, on prendra (227) sur A un point quelconque *ss'* ;

2° On fera passer par ce point une droite C, parallèle à la droite donnée B.

Les projections *c* et *c'* de la droite C seront parallèles aux projections *b* et *b'* de la droite B ;

3° Par les droites A et C qui se coupent au point S, on construira le plan P ;

4° On construira, **fig. 4**, le plan auxiliaire de projection YAZ' perpendiculaire sur la trace horizontale du plan P, puis opérant comme dans le cinquième problème, on fera toutes les opérations nécessaires pour déterminer les droites S-1 et S-2 qui satisfont à la question.

La somme des angles donnés $m''s'''$O, $m'''s'''$N, **fig. 6**, étant plus petite que l'angle obtus Ts'''N, et plus grande que l'angle aigu Ns'''O que les deux lignes données s'''O et s'''N font entre elles, on ne trouve que deux droites satisfaisant aux conditions du problème (216) ;

5° On déterminera les projections de ces droites, d'abord sur le plan auxiliaire Y'AZ' rabattu, **fig. 4**, puis ensuite sur le plan horizontal, **fig. 5**, et sur le plan vertical de projection, **fig. 2** ;

6° Le point *e*, **fig. 5**, étant la trace horizontale de la droite B, on projettera ce point, d'abord en *e''* sur la ligne AZ', puis de là en *e'''* sur le plan P rabattu ;

7° La droite *b'''* menée par *e'''* parallèlement à *s'''*N sera la projection de la droite B sur le plan P rabattu ;

8° Par le point *e''* projection du point *e* sur le plan auxiliaire Y'AZ', **fig. 4**, on tracera la droite *b''* parallèle à la troisième trace du plan P ;

9° La droite *b''* sera la troisième projection de la ligne B, et la trace du plan P_1 mené par la droite B parallèlement au plan P, **fig. 6** ;

10° On déterminera sur la projection auxiliaire Y'AZ', **fig. 4**, les points *u''* et *x''* suivant lesquels leplan P_1 est percé par les deux droites *s''*-1, *s''*-2 (230) ;

11° On déterminera les projections des mêmes points sur le plan horizontal et sur le plan vertical de projection ;

12° On s'assurera que les hauteurs des projections verticales de ces points au dessus de la ligne AZ sont bien exactement égales aux hauteurs des points correspondants sur la projection auxiliaire Y'AZ' ;

13° Par les projections *u* et *u'* du point U, on tracera la droite *uz* parallèle à *a*, et la droite *u'z'* parallèle à *a'*. Cette opération déterminera les deux projections *z* et *z'* d'un point qui appartient à l'une des droites demandées (230) ;

14° Les deux projections *zr*, *z'r'* de cette droite seront parallèles aux projections de la droite S-1, et si l'on a bien opéré, les deux points *r* et *r'* seront situés sur une perpendiculaire à la ligne AZ ;

15° On agira de même pour obtenir les deux projections de la deuxième droite ; ainsi,

16° Le point *x''* étant déterminé sur la projection auxiliaire Y'AZ', on construira :

17° Les projections *x* et *x'* de ce même point, **fig. 5** et **2** ;

18° Les droites *xv* et *x'v'* parallèles aux projections *a* et *a'* de la droite A ;

19° Cette opération déterminera le point *vv'* par les projections duquel on tracera les projections *vn*, *v'n'* de la droite parallèle à S-2.

Quand les projections des droites demandées seront déterminées sur les figures **2** et **5**, on pourra, comme exercice ou comme vérification, projeter les deux droites obtenues zr, $z'r'$ et vn, $v'n'$ sur la projection auxiliaire, **fig. 4**, et sur le plan P rabattu, **fig. 6**.

232. Remarque. Il arrive souvent qu'en prenant les données au hasard, les quantités cherchées sont situées en dehors de la feuille sur laquelle on dessine, et dans ce cas, il est évident qu'aucune opération auxiliaire ne peut faire trouver le résultat.

233. Ainsi, par exemple, si, dans la question qui précède, la somme de deux angles $m''s'''$O et $m'''s'''$N, **fig. 6**, différait très-peu de l'angle aigu Ns'''O que les deux droites données font entre elles, il est évident que l'ordonnée mm^{IV}, et, par conséquent, les droites m^{V}-1 et m^{V}-2 de la figure **4** seraient très-petites.

Les droites s''-1 et s''-2 feraient deux angles très-aigus avec le plan P et par conséquent elles rencontreraient très-loin le plan P_1, d'où il résulte que les points u'' et x'' ne seraient pas sur l'épure et ne pourraient par conséquent être obtenus par aucune construction. C'est pourquoi j'engagerai le lecteur, avant d'entreprendre l'étude d'une question composée, à prendre bien exactement les données telles qu'elles sont établies sur l'épure.

Sans cette précaution il s'exposerait souvent à faire un travail inutile.

Cela ne l'empêchera pas de changer ensuite les données pour s'exercer aux constructions particulières dans chaque cas, mais ces exercices ne doivent se faire que lorsque la question est complétement étudiée avec des données assez favorables pour qu'on ne soit pas distrait à chaque instant du principe général par la nécessité de recourir à des constructions auxiliaires.

Au surplus, ce genre de difficulté n'existe pas dans les applications, parce qu'alors les données ont presque toujours une certaine régularité de forme ou de position que l'on doit

au contraire éviter dans l'étude des principes généraux.

234. Septième cas. Non-seulement il y a des cas où les quantités demandées sont situées très-loin de la place occupée par les données du problème, mais il peut encore arriver que les points ou les lignes cherchées soient situées à l'infini. Ainsi, par exemple :

Si la somme des deux angles donnés m''s'''O, m'''s'''N, **fig. 6**, *était égale à l'angle aigu* Ns'''O *formé par les droites données,* les cônes engendrés par les droites *s'''m''* et *s'''m'''* se toucheraient suivant une génératrice commune située dans le plan P (218) ; cette droite satisferait aux conditions données à l'égard des droites *s'''*O et *s'''*N, mais il est évident qu'étant située dans le plan P, **fig. 4**, elle ne pourrait pas rencontrer la droite B qui est située dans le plan P_1 d'où l'on pourra conclure qu'aucune ligne ne peut satisfaire à la question.

Quoiqu'il n'existe pas de moyen de satisfaire aux conditions demandées, on peut cependant approcher de la solution.

En effet, supposons que le plan P ait été transporté, **fig. 1**, et que l'on ait obtenu la ligne SM faisant l'angle *a* avec la droite A et l'angle *c* avec la droite C. La somme des angles $a + c$, étant égale à l'angle CSA, la droite SM sera située dans le plan P (218).

La droite demandée devant être parallèle à SM et couper la droite A, ne peut pas quitter le plan P, elle ne peut donc pas couper la droite B qui, étant parallèle au plan P, n'a aucun point de commun avec ce plan.

Mais concevons par la droite SM un plan P_1 perpendiculaire au plan P et supposons que l'on fasse mouvoir ce plan parallèlement à lui-même. Il coupera les droites A et B suivant des points désignés sur l'épure par les chiffres 1, 2, 3 qui correspondent aux diverses positions du plan mobile P_1.

Si l'on joint les points correspondants par les droites 1-1, 2-2, 3-3, etc., toutes ces lignes étant inclinées par rapport au plan P, les angles qu'elles font avec les deux lignes données A et B ne sont pas égaux aux angles donnés *a* et *c*, situés dans le plan P. Mais ces angles se projettent par le

plan P par a' et c' qui sont égaux aux deux angles donnés a et c.

Or, à mesure que la droite mobile s'éloignera du plan P_1, son inclinaison par le plan P diminuera, et lorsque cette droite mobile sera parvenue jusqu'à l'infini, les angles suivant lesquels elle coupera les deux lignes données ne différeront plus de leurs projections a' et c'. Ainsi :

Lorsque la somme des deux angles a *et* c *sera égale à l'angle aigu que les deux droites données font entre elles, la ligne demandée ne pourra être située qu'à l'infini.*

Il en sera de même pour la droite suivant laquelle se touchent les deux cônes, lorsque la somme des angles donnés $a + c$ est égale à l'angle obtus que les droites données font entre elles (217).

235. Huitième cas. Pour ne rien laisser à désirer sur la question qui nous occupe, j'ai donné, **pl. 30**, toutes les opérations nécessaires dans le cas où la somme des deux angles que la droite cherchée fait avec les deux droites données est plus grande que l'angle obtus que ces deux lignes font entre elles (216).

Les opérations à effectuer sur l'épure étant les mêmes que pour le cas où l'on n'obtient que deux lignes droites, il est inutile d'en recommencer les détails.

Il suffira donc de faire quatre fois sur la planche **30** chacune des opérations que l'on avait faite deux fois sur la planche **29**. Les notations suffiront pour faire retrouver, sur l'épure, tous les points ou les lignes dont nous allons indiquer la position dans l'espace *(voir page* 18).

Ainsi, les droites données étant désignées par A et par B, on construira successivement :

1° Le point S pris à volonté sur la droite A ;

2° La droite C parallèle à B ;

3° Le plan P qui contient les droites A et C ;

4° Le plan auxiliaire de projection Y'AZ' ;

5° Le plan P rabattu, **fig. 7** ;

6° Les projections sur le plan P rabattu des droites S-1, S-2, S-3, S-4 ;

7° Les projections des mêmes droites sur le plan auxiliaire Y'AZ' ;

8° Les projections horizontales des mêmes lignes, **fig. 5** ;

9° Leurs projections verticales, **fig. 2** ;

10° Les quatre points u'', u'', u'', u'' suivant lesquels les quatre droites obtenues, **fig. 4**, percent le plan P_1 mené par la droite B parallèle à P (230) ;

11° Les projections horizontales u, u, u, u des quatre points précédents ;

12° Les droites uz menées par ces points, parallèlement à la droite A, détermineront sur la projection horizontale de la ligne B quatre points z, z, z, z ;

13° Les droites zr menées par chaque point z, parallèlement à la droite qui joint le point s avec le point u correspondant, seront les projections horizontales des lignes demandées ;

14° Les points r, r, r, r, suivant lesquels ces lignes coupent la projection horizontale de la droite A, détermineront les projections horizontales des parties des lignes demandées qui sont comprises entre les deux droites données ;

15° Les droites obtenues ZR sont évidemment les lignes S-1, S-2, S-3, S-4 que l'on a fait glisser sur la droite A et parallèlement à elles-mêmes, jusqu'à ce qu'elles coupent la ligne B suivant les points Z ;

Pour que l'on puisse plus facilement retrouver les droites ZR, j'ai reporté sur le prolongement de chacune de ces lignes le numéro qui la désignait lorsqu'elle passait par le point S ;

16° Les quatre droites ZR étant projetées sur le plan horizontal par zr, on déterminera leurs projections verticales par des perpendiculaires à la ligne AZ, et l'on s'assurera que chacune des projections verticales $z'r'$ est parallèle à la projection verticale de la ligne correspondante du point s' ;

17° **Vérifications**. Les perpendiculaires à la droite AZ', menées par les projections horizontales des points z et r, détermineront sur la figure **4**, les projections $z''r''$ qui devront être parallèles chacune à la projection de la ligne correspondante du point s'' ;

On devra encore s'assurer que les hauteurs des points z''

et r'' au dessus de la droite AZ′ doivent être égales aux hauteurs des points z' et r' au dessus de AZ ;

18° Le point o, suivant lequel la droite B perce le plan horizontal de la projection, se projette en o'' sur la ligne AZ′ ;

La perpendiculaire abaissée du point o'' sur le plan P détermine un point v'' qui se rabat sur AZ′ en v''' ;

Enfin, la droite $v'''o'''$, parallèle à la trace horizontale du plan P, détermine la projection o''' du point o sur le plan P rabattu ; de sorte que la droite b''' parallèle à c''' sera la projection de la droite B sur le plan P rabattu ;

Au lieu du point o on aurait pu projeter sur le plan P tout autre point de la droite B ;

19° Les droites menées par les points z et r perpendiculairement à la trace horizontale du plan P, détermineront sur b''' et a''' les projections des points z''' et r''', et par suite les projections $z'''r'''$ des quatre droites demandées, parallèles chacune à la droite correspondante du point s''' ;

Les points z'' et r'' de la figure **4** étant projetés sur le plan P, les arcs de cercle décrits du point e comme centre détermineront huit points sur AZ′, et les droites menées par ces huit points parallèlement à la trace horizontale du plan P devront passer par les points z''' et r''' de la figure **7**.

236. Remarque sur le problème précédent. L'épure composée des figures **2**, **4**, **5** et **7** contient la solution complète du problème général énoncé au numéro 213, mais le grand nombre de lignes nécessaires pour résoudre ou vérifier le problème ne permettrait pas d'exécuter l'épure sur un tableau et l'on comprendra difficilement qu'elle ait pu figurer pendant quelque temps dans le questionnaire de Saint-Cyr.

En résumant, la solution générale du problème consiste à construire :

1° Un point quelconque sur l'une des lignes données, sur A par exemple ;

2° Par ce point une droite C parallèle à B ;

3° Le plan P qui contient les deux droites A et C ;

4° Rabattre le plan P, et construire le développement de l'angle trièdre :

5° Reformer l'angle trièdre, ce qui détermine les droites demandées ;

6° Ramener ces lignes à la place qu'elles doivent occuper dans l'espace ;

7° Faire toutes les vérifications possibles.

237. Neuvième cas. Pour offrir aux élèves quelques occasions d'exercices, j'ai ajouté plusieurs cas particuliers, assez simples pour qu'il soit possible d'en faire des questions d'examen. Ainsi, par exemple :

Sur la figure **6**, les projections verticales a' et b' des deux droites données étant parallèles, le plan P sera perpendiculaire au plan vertical de projection.

On rabattra ce plan autour de sa trace horizontale et l'on exécutera les constructions nécessaires pour déterminer sur le plan P rabattu la projection $s''m$ de la droite demandée.

La somme des angles donnés $m'''s''$N, $m''s''$O étant plus petite que l'angle obtus que les droites données font entre elles, on obtiendra deux droites projetées en une seule $s''m$, sur le plan P rabattu.

Mais pour ne pas surcharger cette épure, je n'ai conservé que les opérations qui se rapportent à l'une des deux droites qui se projettent sur le plan P par $s''m$.

Ainsi, ramenant le point m en m' et faisant $m'v'$ égale à mv''', on obtiendra $s'v'$ pour la projection verticale de la droite cherchée, on déterminera ensuite comme dans toutes les épures précédentes :

1° La projection horizontale sv de la même droite ;

2° Le point $u'u$ suivant lequel cette droite perce le plan P, mené par la droite B parallèlement au plan P ;

3° On fera glisser la droite su, $s'u'$ parallèlement à elle-même en l'appuyant sur la ligne aa' ;

Dans ce mouvement, le point uu' décrit la droite uz, $u'z'$ parallèle à aa' ;

4° Enfin, lorsque le point uu' sera parvenu en zz' sur la droite bb', on tracera zr, $z'r'$ parallèle à la droite su, $s'u'$, ce

qui déterminera les deux projections de la droite cherchée ;

5° On pourra vérifier les opérations en construisant les projections b'' et $z''r''$ sur le plan P rabattu ;

Il ne faut pas oublier dans ce cas que l'on doit avoir b'' parallèle à c'' et $z''r''$ parallèle à $s''u''$.

238. Dixième cas. Sur la **fig. 8** les projections horizontales a et b des deux droites données sont parallèles, d'où il resulte que le plan P sera vertical.

Dans ce cas, les opérations seront absolument les mêmes que pour l'exemple qui précède.

Il suffira d'exécuter sur le plan vertical toutes les constructions qui, sur la **fig. 6**, étaient exécutées sur le plan horizontal, et réciproquement.

239. Onzième cas. Sur la **fig. 3**, les deux droites données a et b sont parallèles au plan de projection, qui coïncide alors avec le plan P, ce qui évite le rabattement de ce plan.

Dans ce dernier exemple, la somme des deux angles donnés étant plus grande que l'angle obtus que les droites données font entre elles, la solution complète du problème donnerait *quatre* droites (216), mais je n'ai conservé que les opérations qui se rapportent à l'une d'elles.

240. Douzième cas. Je terminerai l'étude de la question qui nous occupe par le cas où les angles donnés $m's'''$M, $m''s'''$O, **fig. 1**, seraient droits tous les deux. Dans cet exemple, les droites données étant inclinées d'une manière quelconque dans l'espace, on adoptera la disposition d'épure des septième et huitième problèmes, et lorsque le plan P sera rabattu sur le plan horizontal de projection, ce qui donnera les trois faces a, b, c de l'angle trièdre développé, il est évident que le cône engendré par l'arête extérieure $s'''m'$ de la face a sera remplacé par le plan P_2 perpendiculaire sur la droite s'''N.

Le cône engendré par le côté extérieur $s'''m''$ de l'angle c sera également remplacé par le plan P_3 perpendiculaire sur la droite s'''O. L'intersection de ces deux plans sera perpendi-

culaire sur le plan P et se projettera sur ce plan par le point s''' ; la ligne demandée parallèle à l'intersection des deux plans P_2 et P_3 sera par conséquent la perpendiculaire commune aux deux droites données.

La direction de cette ligne étant connue, sa position dans l'espace sera déterminée en opérant comme dans tous les exemples qui précèdent ; ainsi, on construira :

1° La projection $s''u''$ de la droite suivant laquelle se coupent les deux plans P_2 et P_3 ;

2° La projection horizontale su et la projection verticale $s'u'$ de la même droite ;

3° Les projections u'', u et u' du point suivant lequel cette droite perce le plan P_1 mené par la droite B parallèlement au plan P ;

4° Les projections uz, $u'z'$ de la droite parcourue par le point uu', lorsque l'on fait glisser la droite su, $s'u'$ sur la ligne aa' jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite bb' ;

5° Les deux projections zr, $z'r'$ de la ligne demandée ;

6° On pourra, comme vérifications, ajouter les projections $z''r''$ et $z'''r'''$ de la même droite sur le plan Y' AZ' et sur le plan P rabattu ;

7° La projection $z''r''$ sera la distance des deux lignes données, puisque la perpendiculaire qui exprime cette distance est parallèle au plan auxiliaire de projection Y' AZ' ;

8° Enfin, on remarquera que l'on pourrait sans inconvénient supprimer tout ce que l'on a projeté sur le plan P rabattu, cette partie de l'épure ne servant dans le cas actuel qu'à rattacher la question particulière que nous venons de résoudre au problème général énoncé au numéro 213.

CHAPITRE V.

Plans cotés.

241. Définitions. Jusqu'ici nous avons supposé que les plans de projection faisaient partie des données; mais cela n'a jamais lieu dans la pratique.

Les éléments du problème à résoudre dépendent presque toujours des dispositions principales d'un objet plus ou moins composé dont les dimensions sont souvent exprimées par des nombres. Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'un monument, on dessinera le plan ou projection horizontale nécessaire pour bien indiquer la distribution intérieure; puis on pourra *provisoirement* indiquer par des nombres les hauteurs des planchers, des portes ou des fenêtres.

Lorsqu'un ingénieur veut étudier un grand projet, tel, par exemple, qu'un chemin de fer, un canal, un système de fortifications, il commence par lever bien exactement les plans ou projections horizontales du projet et du terrain primitif; puis, afin de pouvoir évaluer la quantité de matériaux qu'il faudra déplacer, il indiquera par des nombres la hauteur de chaque point au dessus d'un plan horizontal *quelconque* que l'on nomme *plan de comparaison*. C'est là ce que l'on entend par un *plan coté*.

242. Les nombres placés ainsi à côté de la projection horizontale de chaque point, indiquant sa hauteur au dessus du plan de comparaison, il pourra sembler singulier que l'on ait eu l'idée de nommer cela *un plan coté*. En effet, ce ne

sont pas les lignes du plan qui sont cotées, ce sont les hauteurs. Pour que le plan fût *coté*, il faudrait que les nombres indiquassent les *dimensions horizontales*, comme, par exemple, les longueurs et les épaisseurs des murs, les côtés des triangles qui ont servi à déterminer la projection horizontale de chaque point, ou les *abscisses* et *ordonnées* de ces points rapportés à des axes de convention. Ce serait alors le *plan qui serait coté*, tandis que dans le cas actuel les cotes n'expriment évidemment que les *hauteurs*.

On aurait une représentation complète de l'objet en indiquant par des cotes à l'encre noire les dimensions horizontales, et en *cotes rouges* les hauteurs des points essentiels au dessus du plan de comparaison. Mais, cela ne pourrait se faire que pour des objets très-simples et, dans le cas où la question est composée, on préfère ordinairement indiquer les cotes de hauteurs sur les ordonnées verticales de l'élévation.

Quoi qu'il en soit, nous adopterons l'expression en usage, et nous donnerons le nom de *plan coté* à la projection horizontale sur laquelle on a désigné par des nombres les hauteurs des points essentiels.

243. Plan de comparaison. Le plan de comparaison peut être pris où l'on voudra et peut être élevé ou abaissé suivant les circonstances particulières de la question que l'on étudie.

Il suffit alors de diminuer ou d'augmenter toutes les cotes d'une quantité égale à la distance qui existe entre le premier et le second plan de comparaison.

Mais lorsque plusieurs plans sont destinés à être réunis, il vaut mieux adopter un *plan de comparaison commun*. Dans les grands travaux, on prend le *niveau de la mer* pour plan de comparaison.

244. Si les dimensions horizontales sont dessinées sur le plan avec une exactitude suffisante, il est évident que les *cotes de hauteur* exprimées en nombres compléteront la description des parties essentielles du projet, mais la question ne sera pas résolue.

La *projection unique* que l'on aura ainsi obtenue ne contiendra que *les données du problème* et ne dispensera pas de construire les nombreuses projections auxiliaires sans lesquelles il serait souvent impossible de résoudre toutes les parties de la question proposée.

245. L'utilité d'un plan coté ne provient donc pas, comme quelques personnes paraissent le croire, de ce que toutes les dimensions sont exprimées sur une seule projection, mais de ce que rien ne déterminant, *à priori*, le second plan de projection, on peut toujours le choisir de manière à obtenir les opérations les plus simples. Nous allons compléter ce qui précède par quelques exemples.

246. Le numéro 14 de la figure **1**, planche **31**, indique un point situé à 14 *mètres* au dessus du plan de comparaison. Le numéro 2,73 est un point situé à 2 *mètres* 73 *centimètres*. On a 273 *centimètres* de hauteur. S'il y a beaucoup de cotes exprimées en fractions du mètre, on prendra le *centimètre* ou le *millimètre* pour *unité*.

247. Pour simplifier les questions que nous allons résoudre, nous supposerons, sur la planche actuelle, que toutes les *cotes de hauteur* sont exprimées par un nombre exact de mètres, et que le mètre est représenté graphiquement par la droite M, qui est égale à *cinq millimètres* ou $\frac{1}{200}$ de mètre.

248. Ce qui précède étant admis, les deux cotes 9 et 4, de la figure **1**, détermineront complétement la droite qui joint les points correspondants de l'espace, et si l'on divise la projection horizontale de cette droite en *cinq* parties égales, on aura les cotes de hauteur pour les points intermédiaires situés à 5, 6, 7 et 8 *mètres* au dessus du plan de comparaison.

En portant quatre fois la distance comprise entre deux de ces points, sur le prolongement de la droite 9-4, on obtiendra les cotes des points 3, 2, 1, et enfin 0, qui est la *trace horizontale* de la droite donnée. La ligne 9-0 est ce que l'on nomme l'*échelle de pente* de cette même droite.

249. Pour obtenir la *cote de hauteur* d'un point quelconque u de la ligne donnée 8-5, **fig. 6**, on rabattra cette ligne sur le plan horizontal qui contient l'un quelconque de ses points, le point 5, par exemple ; on obtiendra ainsi les deux triangles semblables 5'-5'''-8 et 5'-5''-u', puis on résoudra l'équation :

$$5'\text{-}5''' : 5'\text{-}5''' = 5'''\text{-}8' : 5''\text{-}u'$$

qui devient $$5'\text{-}5''' : 5'\text{-}5''' = 3 : 5''\text{-}u'$$

d'où $$5''\text{-}u' = \frac{3\,(5'5'')}{5'\text{-}5'''}.$$

Remplaçant 5'-5'' et 5'-5''' par leur longueur en mètres ou fractions de mètres, on obtiendra 5''-u' qui, ajouté au nombre 5, donnera la cote de hauteur pour le point U de l'espace.

On peut écrire la proportion sans rabattre le triangle qui n'a été tracé dans le cas actuel que pour l'explication du principe.

250. *Faire passer un plan par trois points dont les cotes de hauteur sont* 8, 5 et 3, **fig. 2.**

1° On tracera les droites 8-5, 8-3 ;

2° On déterminera les échelles de pente et leur trace (248), par lesquelles on fera passer la trace horizontale 0-0 du plan demandé P.

Toutes les droites 5-5, 4-4 ou 2-2, passant par les points de cotes égales sur les lignes données, sont des horizontales du plan P.

La droite 8-*a* perpendiculaire sur la trace 0-0 du plan P est *l'échelle de pente* de ce plan.

251. Les droites 3-*c*, 5-*e* sont également les échelles de pente du même plan. En général, toute droite abaissée d'un point quelconque d'un plan, sur sa trace horizontale, sera son échelle de pente ; d'où il résulte qu'un plan a une infinité d'échelles de pente qui sont toutes parallèles entre elles (253). On peut encore conclure de ce qui précède que la position d'un plan sera déterminée dans l'espace dès que l'on connaîtra une quelconque de ses échelles de pente. Ainsi les

points 5 et 2, **fig. 4**, étant situés sur l'échelle de pente d'un plan P, on déterminera le point 0, et la trace horizontale du plan P sera perpendiculaire sur la ligne 5-0.

252. Si l'on veut déterminer la cote de hauteur d'un point *a* situé dans le plan P, on tracera l'horizontale *am* perpendiculaire à l'échelle de pente, et l'on calculera la cote du point *m*, en opérant comme nous l'avons dit au n° 249.

253. Deux droites 11-5 et 9-3, **fig. 3**, sont parallèles lorsque leurs échelles de pente sont *parallèles*, *égales* et inclinées *dans le même sens*. La trace 0-0 du plan P, qui contient ces deux droites, passera par leurs traces et sera parallèle à toutes les droites qui joindraient les points de cotes égales sur les deux droites données. Il ne faut pas confondre les échelles de pente des deux parallèles données avec les échelles de pente du plan P qui contient ces deux lignes.

254. Si deux plans sont parallèles, **fig. 13**, leurs échelles de pente 6-2, 7-3 seront parallèles et perpendiculaires aux traces horizontales des plans donnés P et P_1. Réciproquement, si les échelles de pente de deux plans sont parallèles, ces deux plans seront parallèles.

255. *Déterminer l'intersection de deux droites*, **fig. 5.** Pour que deux droites se coupent, il faut qu'elles soient dans un même plan, ce que l'on reconnaîtra lorsque les horizontales 1-1, 3-3 ou 5-5, etc., seront parallèles.

Pour obtenir la cote de hauteur du point d'intersection U, on rabattra l'une des droites 0-5′, et l'on calculera la cote de hauteur *u*U en opérant comme nous l'avons dit au n° 249.

256. *Trouver*, **fig. 7**, *l'intersection d'une droite* 11-7 *et d'un plan déterminé par son échelle de pente* 13-6. On rabattra le plan projetant vertical AZ de cette échelle, ce qui donnera 13′-6′ pour la trace verticale d'un plan donné, on projettera la droite donnée 11-7 sur le plan AZ rabattu, ce qui donnera 11′-7′, et le point *u*′ sera la projection verticale

du point demandé dont la projection horizontale *u* sera déterminée. Pour obtenir la cote de hauteur du point *uu'* on calculera *mu'* en opérant comme nous l'avons dit au n° 249, et l'on ajoutera le nombre 7 au résultat obtenu.

257. *Construire l'intersection* KH *de deux plans* P *et* P_1 *déterminés par leurs échelles de pente* 10-3 *et* 7-2, **fig. 8.**

1° L'horizontale 7 du plan P rencontrera l'horizontale 7 du plan P_1 en un point qui sera le point 7 de la droite demandée KH ;

2° L'horizontale 3 du plan P et l'horizontale 3 du plan P_1 se couperont suivant le point 3 de la droite KH qui par conséquent sera déterminée.

258. Sur la figure **9** l'intersection KH des plans P et P_1 est déterminée par les horizontales 8 et 3 de ces plans.

259. Sur la figure **10** les projections 10-2 et 9-5 des échelles de pente des plans donnés étant parallèles, les horizontales de même hauteur seraient également parallèles; dans ce cas l'intersection KH des plans donnés sera perpendiculaire aux échelles de pente et pour obtenir la projection verticale H' de cette intersection on pourra opérer de la manière suivante :

1° On rabattra le plan projetant vertical AZ de l'échelle de pente 9-5 du plan P_1 et l'on projettera l'échelle 10-2 sur ce plan AZ rabattu. Les droites 9'-5' et 10'-2' seront les traces verticales de deux plans donnés, et ces plans étant perpendiculaires tous deux au plan vertical de projection AZ, leur intersection sera projetée sur ce plan par un seul point H' qui suffira pour construire la projection horizontale KH, et pour calculer sa cote de hauteur, en opérant comme nous l'avons dit au numéro 249.

260. Sur la figure **11** les échelles de pente des plans donnés sont inclinées dans le même sens, et leurs projections sont parallèles; mais les traces verticales 8'-3' et 6'-4' se rencontrent très-loin et très-obliquement. Dans ce cas, on aura recours au calcul, ainsi on écrira l'équation de la droite qui contient les points 8' et 3' de la première trace ; on écrira

également l'équation de la deuxième trace ; on éliminera les x, et la valeur de y sera la cote de hauteur de la droite cherchée, qui sera comme ci-dessus perpendiculaire aux échelles de pente des plans donnés.

261. Sur la figure **12**, les projections 11-6 et 5-4 des échelles de pente étant presque parallèles, les horizontales de cotes égales se couperaient trop obliquement. Dans ce cas, on rabattra comme ci-dessus le plan projetant vertical AZ de l'échelle de pente 5-4, et la droite 5'-4' sera la trace du plan P_1 perpendiculaire au plan vertical AZ.

On projettera sur ce dernier plan deux échelles de pente quelconques (251) 11'-6', 11''-6'' du plan P et les points $m'm$ et $u'u$ suivant lesquels ces droites perceront le plan 5'-4', détermineront la droite KK qui sera la projection horizontale de l'intersection demandée.

262. Sur la figure **13**, les échelles de pente 7-3 et 6-2 étant parallèles (253), les plans donnés seront en même temps parallèles (254) et ne se couperont qu'à l'infini.

263. *Trouver le point d'intersection de trois plans* P, P_1 *et* P_2 *déterminés par leurs échelles de pente* 7-3, 8-4 et 5-2, **fig. 14**.

1° En opérant comme nous l'avons dit au numéro 257, on obtiendra l'intersection KH des plans P et P_1 ;

2° En opérant comme au numéro 256, on obtiendra le point $u'u$ suivant lequel le plan P_2 est percé par la droite K'H'.

Le plan P_2 perpendiculaire au plan vertical projetant de son échelle de pente 5-2 se projettera sur ce plan, par sa trace verticale 5'-2', et la projection K'H' sera déterminée par les points 7 et 3 de la projection horizontale KH.

264. Remarque. On voit, par ce qui précède, que le principal avantage des plans cotés provient surtout de ce que la projection verticale, étant remplacée par les cotes de hauteur, les données peuvent être projetées *dès l'origine* sur le plan qui convient le mieux à la question particulière que l'on veut résoudre, ce qui évitera souvent l'emploi des plans auxiliaires de la projection (245).

265. *Par un point* 8, *déterminé par sa cote de hauteur*, **fig. 15,** *faire passer des droites parallèles à un plan qui a pour échelle de pente la droite* 5-2.

Le plan donné, perpendiculaire au plan projetant vertical AZ de son échelle de pente, se projettera sur ce plan par sa trace verticale 5′-2′. Le point donné se projettera par 8′, et la droite 8′-6′ parallèle à 5′-2′ sera la trace verticale d'un plan passant par le point 8,8′ et parallèle au plan 6′-2′.

La droite 6′-6″ sera une horizontale du plan 8′-6′, et toutes les droites 8-6″ qui, passant par le point donné 8-8′, s'appuieront sur l'horizontale 6′-6″, seront situées dans le plan 8′-6′ et seront, par conséquent, parallèles au plan donné 5′-2′.

266. *Par une droite* 4-1, **fig. 16,** *construire un plan parallèle à une seconde droite* 10-7.

1° Par un point quelconque 3 de la première droite on construira une droite 5-2 parallèle à la droite 10-7 (253) ;

2° La droite 0-0 sera la trace horizontale du plan demandé qui contiendra la droite donnée 4-1, et qui, de plus, sera parallèle à la droite 10-7, puisqu'il contiendra la droite 5-2 qui lui est parallèle.

267. *Par une droite donnée* 11-5, **fig 17,** *faire passer un plan perpendiculaire à un plan donné* 6-1.

Par un point quelconque 7 de la droite donnée 11 5, on construira la droite 7-2 perpendiculaire au plan donné. Cette perpendiculaire 7-2, rabattue autour de AZ, deviendra 7′-2′ perpendiculaire sur la droite 6′-1′ suivant laquelle le plan donné 6-1 coupe le plan projetant vertical 7-2. Enfin, la droite passant par le point 0 des deux droites 7-2 et 11-5 sera la trace horizontale du plan demandé P_1.

268. *Déterminer la distance d'un point* 6, **fig. 18,** *à un plan donné par son échelle de pente* 7-3.

1° On rabattra le plan projetant AZ de la droite 7-3 qui deviendra 7′-3′ ;

2° Le plan donné 6 sera projeté par h' sur le plan vertical AZ ;

3° La droite $6'$-u', perpendiculaire sur $7'$-$3''$ sera la distance demandée dont la projection horizontale sera 6-u ;

4° On pourra calculer la cote de hauteur du point uu' en opérant comme nous l'avons dit au numéro 249.

269. *Trouver la distance de deux plans parallèles déterminés par leurs échelles de pente* 8-5 *et* 4-1, **fig. 19**.

On construira leurs traces $8'$-$5'$ et $4'$-$1'$ sur le plan vertical projetant AZ et la perpendiculaire $m'n'$ sera la distance demandée.

270. *Déterminer la distance d'un point donné* 6 *à une droite donnée* 5-1, **fig. 20**.

1° On rabattra le plan projetant AZ de la droite donnée ;

2° Le point donné 6 se projettera par $6'$ sur ce plan rabattu ;

3° La droite $6'$-u' perpendiculaire sur $5'$-$1'$, sera la trace d'un plan perpendiculaire sur la droite donnée ;

4° Ce plan coupera la droite donnée en un point $u'u$;

5° La droite 6-u sera la projection horizontale de la perpendiculaire abaissée du point 6 sur la droite donnée ;

6° On calculera la cote du point u et la longueur de la droite 6-u, $6'$-u' ; ou l'on fera tourner cette droite autour de l'horizontale projetante du point 6, ce qui donnera 6-u'' pour la distance demandée.

271. *Déterminer la distance de deux droites parallèles* 9-5 *et* 6-2, **fig. 21**.

On projettera les deux droites sur le plan projetant AZ de l'une d'elles, ce qui donnera $9'$-$5'$ et $6'$-$2'$ pour leurs projections rabattues. Le plan P, perpendiculaire sur ces droites, déterminera les deux points mm', nn' dont on cherchera la distance mn'' par le calcul, ou par un rabattement.

272. *Déterminer la distance de deux droites quelconques* 11-7 *et* 8-3, **fig. 22**.

1° Par un point 4, pris à volonté sur l'une des lignes données 8-3, on construira la droite 6-2 parallèle à 11-7 ;

2° Les deux droites 8-3 et 6-2 détermineront un plan parallèle à la droite 11-7 ;

3° Le plan des deux droites 8-3 et 6-2 sera projeté par la tracé verticale 6′-2′ sur un plan vertical AZ perpendiculaire à une horizontale 6-6 déterminée par deux points de cotes égales pris à volonté sur les droites 8-3 et 6-2 ;

4° On choisira sur la droite 11-7 un point quelconque 8 dont on construira la projection 8′ sur le plan AZ rabattu ;

5° La droite 8′-*u*′, perpendiculaire sur le plan 6′-2′, sera la distance demandée ;

6° Si l'on veut obtenir la projection horizontale de la droite perpendiculaire aux droites données, on déterminera la projection *u* du point *uu*′ ;

7° On tracera 8-*u* qui sera la projection 8′*u*′ ;

8° On fera mouvoir cette droite parallèlement à elle-même jusqu'à ce que le point *u* soit arrivé en *n* sur la droite 8-3 ;

9° On tracera *nm* parallèle à 8-*u*, ou l'on fera 8-*m* égal à *un*, ce qui donnera la projection horizontale *mn* de la ligne demandée dont il sera facile d'obtenir la projection verticale *m*′*n*′.

273. Nous terminerons ici l'étude des plans cotés. Ce qui précède suffit pour faire comprendre tout le parti que l'on peut tirer de cette méthode. On voit combien il est important, lorsque l'on veut résoudre un problème, de choisir dans chaque cas les plans de projections les plus convenables ; ce que l'on comprendra bien mieux encore lorsque nous serons arrivé aux applications de la Géométrie descriptive. Ainsi nous ne reprendrons pas les questions que nous avons résolues sur les angles des lignes et des plans. Je rappellerai seulement que l'angle de deux droites s'obtiendra par un rabattement autour d'une horizontale quelconque située dans le plan de ces lignes (157) ; que l'angle d'une droite avec un plan est le complément de l'angle que la droite fait avec une perpendiculaire au plan donné (162) ;

enfin, que l'angle de deux plans peut toujours se ramener à l'angle de deux droites menées par un point de l'espace perpendiculairement à chacun des deux plans donnés (172).

CHAPITRE V.

Polyèdres.

274. Projection des polyèdres. On sait (*Géom.*) que les polyèdres sont des corps terminés par des faces planes. Il résulte de là que les dimensions d'un polyèdre seront parfaitement connues dès que l'on connaîtra la position relative de ses sommets ; car la position des sommets déterminera celle des arêtes, et les arêtes détermineront les faces.

On voit donc que pour projeter un polyèdre il suffira de projeter tous ses sommets. Mais comme, en représentant sur une épure toutes les dimensions d'un corps que l'on se propose d'exécuter, on doit prévoir le moment où il faudra obtenir d'après le dessin les véritables grandeurs des diverses parties de ce corps pour les transporter sur les matériaux dont il doit être composé, on doit, autant qu'on le peut, choisir le système du plan de projection le plus propre à atteindre ce but. Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'un prisme, on placera, **fig. 146, pl. 32,** une de ses bases *abcde* dans le plan horizontal et l'on prendra pour second plan de projection un plan vertical parallèle aux arêtes ; puis, après avoir construit la projection horizontale de la base supérieure, on élèvera, par tous les sommets de cette projection, des perpendiculaires jusqu'à ce qu'elles rencontrent le plan horizon-

tal p, dont la position est déterminée par la hauteur que l'on veut donner au prisme que l'on projette.

On voit qu'au moyen de la précaution que l'on a prise de placer les bases du prisme horizontalement, et les arêtes parallèles au plan vertical de projection, toutes les arêtes de ce corps sont projetées sur l'un ou l'autre plan de projection dans leur véritable grandeur.

275. Les figures obtenues par la méthode des projections diffèrent essentiellement des formes apparentes sous lesquelles les corps se présentent ordinairement à nos yeux. Nous verrons la raison de cette différence lorsque nous nous occuperons de la perspective. Cependant, pour rendre plus faciles à concevoir les projections des corps solides, on est convenu que l'on regarderait certaines lignes comme vues, et d'autres comme étant cachées, et que pour les distinguer on tracerait en plein les lignes vues, et que l'on ponctuerait les lignes cachées. Pour cela on suppose, lorsqu'on regarde la projection horizontale d'un corps, que l'œil est placé au dessus de ce corps à une distance infiniment grande, et lorsqu'on regarde la projection verticale, on est censé être placé devant le plan vertical, et infiniment loin de ce plan. Cette supposition d'une distance infinie est nécessaire ; car sans cela, comme nous le verrons plus tard, la forme apparente d'un corps ne serait pas la même que sa projection.

Cette convention une fois adoptée, nous dirons qu'une ligne est vue, lorsqu'un point quelconque partant de cette ligne peut s'éloigner infiniment du plan de projection, et suivant une perpendiculaire à ce plan, sans rencontrer la masse d'aucun corps solide, et dans le cas contraire la ligne est cachée.

Ainsi, par exemple, si les deux lignes (aa', bb'), **fig. 147**, étaient deux arêtes du même polyèdre, la première serait cachée sur la projection horizontale. En effet, si on trace la verticale du point m, il est évident qu'elle coupera les deux droites données aux points $m'm''$. Or, le dernier de ces deux points appartenant à la droite bb', on en conclut que cette ligne passe au dessus de aa', et que, par conséquent, la projection horizontale de cette dernière droite doit être

tracée en points. Par un raisonnement analogue, on reconnaîtra que la projection verticale de la ligne *bb'* doit être ponctuée.

276. Si l'on voulait projeter une pyramide, **fig. 148**, on placerait la base dans le plan horizontal, puis on construirait en *s* la projection horizontale du sommet dont la projection verticale *s'* serait déterminée par la hauteur que l'on veut donner à la pyramide.

On conçoit qu'ici on ne peut placer qu'une ou quelquefois deux des arêtes obliques, parallèlement au plan vertical.

277. Nous avons supposé jusqu'ici que l'on projetait un polyèdre dans l'intention de l'exécuter ensuite ; mais assez souvent le corps existe déjà lorsqu'on se propose d'en obtenir les projections.

Ainsi, par exemple, s'il s'agissait de dessiner les projections d'un monument ou d'une machine, on commencerait par mesurer toutes les dimensions des lignes horizontales et verticales, que l'on reporterait ensuite sur l'épure, soit dans leur grandeur véritable, soit réduites d'après un rapport donné ; puis au moyen d'un fil à plomb ou d'une équerre placée verticalement, on déterminerait les pieds des perpendiculaires abaissées des points qu'il serait essentiel de projeter ; et, mesurant les hauteurs de ces points au dessus du plan horizontal, il serait facile de construire la projection verticale du solide.

Mais on conçoit que l'exactitude du résultat dépendra du plus ou moins de soin avec lequel on aura pris toutes les mesures, ou de la perfection des instruments que l'on aura employés. Aussi ne devra-t-on prendre sur le corps même que le moins de mesures possible, et déduire, autant que l'on pourra, la grandeur de toutes les autres parties de ce corps, de sa définition géométrique. Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'un prisme droit à base carrée, on ne mesurera que le côté de la base et la hauteur du prisme ; lorsque plusieurs points seront dans un même plan horizontal, il suffira de connaître la hauteur de l'un d'eux.

Nous allons faire l'application de ces principes à la projection des cinq polyèdres réguliers.

278. *Projection du tétraèdre régulier.* On construira d'abord, **fig. 149**, un triangle équilatéral *abc*; puis, joignant les trois sommets de ce triangle avec le centre *d*, on aura la projection horizontale du tétraèdre. Pour obtenir la projection verticale, on projettera les sommets *a*, *b*, *c* sur la ligne AZ ; et si l'on a eu soin de placer l'une des arêtes *ad*, *a'd'* parallèle au plan vertical, elle doit se projeter sur ce plan dans sa véritable longueur ; de sorte qu'il suffira de décrire du point *a'*, comme centre, avec un rayon égal à l'un des côtés de la base, un arc *od'* dont l'intersection avec la verticale *dd'*, donnera en *d'* la projection verticale du sommet.

279. *Projection du cube ou hexaèdre régulier.* On construira deux carrés égaux et disposés comme on le voit, **fig. 150**, l'un sera la projection horizontale, et l'autre sera la projection verticale.

280. *Projection de l'octaèdre régulier.* Deux carrés disposés comme dans la **fig. 151** représenteront les projections de l'octaèdre régulier. Des douze arêtes de ce solide, il y en a quatre parallèles au plan horizontal, et quatre parallèles au plan vertical.

281. *Projection du dodécaèdre régulier.* La projection horizontale de ce solide, **fig. 152**, se composera d'abord de deux pentagones réguliers égaux à l'une des faces, et inscrits dans le même cercle, de manière que les sommets de l'un soient au milieu des arcs sous-tendus par les côtés de l'autre, et d'un décagone régulier inscrit dans un cercle d'un plus grand rayon, et tel que l'on ait $cd = ab$.

Pour construire la projection verticale, on remarquera que l'arête *eh*, *e'h'* étant parallèle au plan vertical, doit se projeter sur ce plan suivant sa véritable grandeur, et que par la même raison *v'u'* doit être égal à la hauteur d'une face.

282. *Projection de l'icosaèdre régulier.* Après avoir con-

struit la projection horizontale, comme on le voit, **fig. 153**, on fera $a'b'$ égale à une arête, et $c'd'$ égale à la hauteur de l'une des faces.

283. Projection oblique des polyèdres. Il arrive quelquefois dans l'architecture, et souvent dans les dessins des machines, que l'on a besoin de projeter un corps solide dans une position inclinée par rapport aux plans de projection. On pourrait placer d'abord le corps dans cette position, et chercher ensuite à construire la projection par les moyens que nous avons indiqués plus haut ; mais il est presque toujours plus facile d'opérer comme il suit.

On placera d'abord le corps dans la position la plus simple et la plus favorable à la construction de ses projections ; puis, par deux mouvements parallèles aux plans de projection, on l'amènera dans telle position inclinée que l'on voudra.

Soit, par exemple, **fig. 155, pl. 33**, une droite (ab, $a'b'$) perpendiculaire au plan horizontal de projection.

Si l'on suppose que cette droite tourne autour de l'horizontale projetante du point (aa') en restant parallèle au plan vertical, on pourra l'incliner de manière qu'elle fasse tel angle que l'on voudra avec le plan horizontal ; dans ce premier mouvement, le point (bb') décrira un arc de cercle (bc, $b'c'$). Faisant ensuite parcourir au point (cc') l'arc horizontal (cd, $c'd'$), l'angle avec le plan horizontal n'aura pas changé, et, par ce double mouvement, on pourra faire prendre à la droite telle position inclinée que l'on voudra.

284. C'est par ces moyens que l'on a construit, **fig. 154**, les projections d'un *parallélipipède rectangle incliné par rapport aux plans de projection.*

Après avoir construit les projections verticale et horizontale, que je désignerai seulement par les lettres (ab, $a'b'$), placées aux extrémités de l'une des diagonales du solide, on a supposé que ce corps tournait autour de l'horizontale projetante du point a et parallèlement au plan vertical, jusqu'à ce qu'il soit venu prendre la position inclinée $a'c'$. Par ce

premier mouvement, le point m' est venu se placer en n', et le corps étant resté parallèle au plan vertical, sa projection sur ce plan n'a fait que changer de position; de sorte que, pour avoir sa nouvelle projection verticale, il a suffi de construire sur $a'n'$ un rectangle $a'n'c'q' = a'm'b'p'$. Les cercles décrits par chacun des sommets étant parallèles au plan vertical, se projettent horizontalement par des droites parallèles à la ligne AZ; les intersections de ces droites avec les perpendiculaires abaissées de la projection verticale $a'n'c'q'$ sont les sommets de la nouvelle projection horizontale du solide.

Supposons actuellement que nous faisons tourner le corps autour de la verticale du point (aa'), le point nn' décrira l'arc horizontal $(no, n'o')$. Ce second mouvement se faisant parallèlement au plan horizontal, la position du corps, relativement à ce plan, est toujours la même, de sorte que la projection horizontale ne fait que changer de place, et pour l'obtenir il suffit de construire de nouveau cette projection, de manière seulement que la ligne an soit dans la position ao. Quant à la projection verticale correspondante, on l'obtient en élevant de tous les points de la nouvelle projection horizontale des perpendiculaires jusqu'à la rencontre des arcs horizontaux parcourus par les sommets du solide dans le second mouvement, et représentés par les lignes horizontales passant par les sommets de la projection $a'n'c'q'$.

285. On peut encore arriver au même but par un autre moyen. Nous avons, dans l'exemple précédent, changé la position du corps par rapport aux plans de projection : on préfère souvent, au contraire, changer la position du plan de projection par rapport à celle du corps. Soit a, a', **fig. 158**, les deux projections d'un point donné. On veut avoir la projection de ce point sur le plan vertical p. On abaissera du point donné une perpendiculaire sur le plan p, et le pied de cette perpendiculaire sera la projection demandée. Ce point se projettera horizontalement en b. Il est inutile de construire la projection verticale b', qui ne servirait à rien ; mais pour mieux apprécier sa position sur le plan vertical p, on supposera que ce plan tourne autour de

sa trace verticale comme charnière, pour se rabattre sur l'épure. Dans ce mouvement, le point b, b' décrira un arc horizontal, et viendra prendre la position b'' ; on pourrait aussi rabattre le plan p sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de sa trace horizontale ; alors le point bb' viendrait se placer en b''', que l'on obtiendrait en faisant bb''' égal à la hauteur du point donné au dessus du plan horizontal.

286. Dans les figures **156, 157, 159**, on s'est proposé de construire les deux projections d'une croix inclinée par rapport aux plans de projection.

Après avoir obtenu la projection inclinée *abcd*, on a construit les traces du plan vertical sur lequel on s'est proposé d'obtenir la nouvelle projection ; puis, après avoir abaissé de tous les angles du solide des perpendiculaires à ce plan, on l'a fait tourner autour de l'une de ses traces, pour le rabattre sur l'un ou sur l'autre des deux premiers plans de projection. La figure **157** représente la nouvelle projection rabattue sur le plan vertical, et dans la figure **159**, elle est rabattue sur le plan horizontal.

287. Il arrive assez souvent, surtout, comme je l'ai dit plus haut, dans les projections des machines, que l'on soit conduit à projeter quelques-unes de leurs pièces dans une position inclinée, afin de faire mieux concevoir comment ces pièces agissent les unes sur les autres, par suite du mouvement qui leur est communiqué ; mais il arrive encore plus souvent que les mêmes procédés soient employés pour résoudre le problème inverse, c'est-à-dire qu'étant données deux projections d'un corps incliné dans l'espace, on remplace les plans coordonnés primitifs par d'autres sur lesquels les projections de ce même corps sont plus simples, et par conséquent plus commodes pour la solution des questions subséquentes. Ce cas se présentera souvent par la suite ; mais, les moyens qu'il faut employer ne différant pas de ceux que nous venons d'indiquer, nous ne nous y arrêterons pas pour le moment.

288. Développement. *Développer la surface d'un polyèdre.* On dit qu'*une surface est développable*, lorsque toutes les parties de cette surface peuvent s'étendre sur un plan sans déchirement. D'après cela, les surfaces de tous les polyèdres peuvent se développer.

Soient, **fig. 160, pl. 34**, les deux projections d'une pyramide quadrangulaire ; on construira (52) la véritable longueur de chacune des arêtes, ce qui donnera le moyen de construire, **fig. 161**, les faces triangulaires *bad*, *bde*, *bec*, *bca* ; quant à la surface quadrangulaire *aced*, on la partagera en triangles par la diagonale *ae*, puis on construira les deux triangles *ace*, *aed*, qui composent cette face. On agirait de la même manière quel que soit le nombre des côtés.

289. Lorsqu'on disposera les données de cette épure, il ne faudra pas placer au hasard les quatre sommets du quadrilatère *aced*, *a'c'e'd'*, parce qu'en agissant de la sorte il est probable que ces sommets ne seraient pas dans un même plan. Pour satisfaire à cette condition, il faudra construire les deux diagonales et s'assurer qu'elles se coupent (59).

La même remarque doit s'appliquer aux projections d'un polygone quelconque.

290. Lorsqu'il y a dans le polyèdre que l'on se propose de développer quelques relations de régularité ou de symétrie, on doit en profiter pour donner au développement plus d'exactitude et de simplicité. Les développements des polyèdres réguliers offrent un exemple de ce que je viens de dire. La figure **163**, qui représente le développement d'un *tétraèdre régulier*, n'est autre chose qu'un triangle équilatéral dont chaque côté est partagé en deux parties égales. Le développement de l'*octaèdre régulier* est inscrit, **fig. 164**, dans un parallélogramme composé de deux triangles équilatéraux, et dont les côtés sont partagés en trois parties égales ; et celui de l'*icosaèdre*, **fig. 165**, est inscrit dans un parallélogramme dont les côtés sont partagés en cinq parties égales. Le développement du *cube* ou *hexaèdre régulier* est inscrit dans un rectangle dont la base est à la hauteur comme 4 est

à 3. Enfin, pour obtenir le développement du *dodécaèdre régulier*, on construira deux grands pentagones réguliers égaux et disposés comme on le voit dans la figure **167**; puis, en menant toutes les diagonales de ces pentagones, on obtiendra, par leur intersection, deux autres petits pentagones placés au centre des premiers, et dont les diagonales prolongées détermineront toutes les faces du dodécaèdre.

Chaque côté de l'un des deux grands pentagones doit être égal à deux fois l'arête du dodécaèdre que l'on veut développer, plus le grand segment de cette arête partagée en moyenne et extrême.

291. *Étant données les deux projections d'un polyèdre, construire les traces des plans qui contiennent les faces de ce polyèdre.*

On choisit dans chaque face trois sommets ou deux arêtes, et la question revient à chercher les traces d'un plan passant par trois points, ou par deux lignes droites qui se coupent (69, 70). C'est ainsi que l'on a obtenu, **fig. 162**, les traces des douze plans qui contiennent les faces d'un dodécaèdre régulier.

292. Section des polyèdres. *Construire la section d'une pyramide par un plan.*

On pourrait, comme nous l'avons dit (291), construire sur les plans de projection les traces des plans qui contiendraient les faces du polyèdre ; alors la question reviendrait à chercher l'intersection de ces plans par le plan donné ; mais il est presque toujours plus simple de chercher les points où le plan donné coupe les arêtes du polyèdre. Par exemple, soit, **fig. 168, pl. 35**, une pyramide pentagonale dont on demande la section par le plan *p* ; on fera pour chacune des cinq arêtes la construction indiquée (87) et l'on obtiendra les projections verticales et horizontales des cinq points suivant lesquels ces arêtes sont coupées par le plan donné. Joignant ces points par des droites, on aura les projections verticale et horizontale de la section demandée.

Si l'on voulait obtenir cette section dans sa véritable

grandeur, on pourrait supposer que le plan qui la contient tourne autour de sa trace, pour venir se rabattre sur le plan horizontal. Dans ce mouvement, chaque point de la section décrirait un arc de cercle perpendiculaire à la trace horizontale du plan donné, et représenté en projection horizontale par une perpendiculaire à cette trace ; de sorte que pour savoir où chacun d'eux viendrait se placer dans le rabattement, il suffirait de chercher sa distance à la ligne qui a été prise pour axe de rabattement. Ainsi, par exemple, pour le point *dd'*, on chercherait la véritable longueur de la ligne *od*, *o'd'*, et cette longueur *od''* donnerait la position du point *dd'* dans le rabattement de la section.

Si l'on voulait construire cette section dans le développement de la pyramide, on construirait d'abord ce développement comme nous l'avons dit (288) ; puis, cherchant la véritable distance de chaque sommet de la section au sommet correspondant de la base ou au sommet de la pyramide, il serait facile de placer chacun de ses points sur la droite qui, dans le développement, représente l'arête qui le contient. Dans la figure **168**, l'arête (*sm*, *s'm'*) étant parallèle au plan vertical, se projette sur ce plan dans sa véritable longueur ; mais pour construire le développement, il a fallu chercher la véritable longueur de chacune des autres arêtes.

Enfin, si le corps dont on a les projections était déjà exécuté, on pourrait se proposer de tracer sur ce corps le polygone résultant de sa section par le plan *p*. Pour cela, on prendrait la distance de chacun des sommets de cette section au sommet de la pyramide ou aux angles de sa base, et il serait facile, en reportant ces longueurs sur les arêtes du polyèdre, d'y déterminer exactement la position des angles de la section.

293. *Section perpendiculaire au plan de projection.*

La disposition des données permet presque toujours de simplifier les opérations. Si, par exemple, il s'agissait d'obtenir la section d'un prisme par un plan perpendiculaire aux arêtes, on placerait ce prisme parallèlement au plan vertical de projection, auquel le plan coupant se trouverait alors perpendiculaire ; la section se projetterait verticalement par

une ligne droite $a'd'$, et pour en avoir la projection horizontale, il suffirait d'abaisser par les points $a'b'h'c'e'd'$ des perpendiculaires à la ligne AZ, jusqu'à la rencontre des projections horizontales des arêtes. La figure $(a''b''c''d''e''h'')$ représente la section rabattue dans sa véritable grandeur sur le plan vertical qui contient l'arête hu, $h'u'$; on suppose qu'avant de la rabattre, on l'a fait avancer parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle soit venue se projeter en (mn).

La véritable grandeur de la section étant obtenue, on a porté tous ses côtés à la suite les uns des autres, et dans le prolongement de la trace verticale du plan p, ce qui a donné la ligne $(a'''b'''c'''...)$ pour la section rectifiée; puis, ayant mené par tous ces points, et perpendiculairement à $a'''m'''$, des lignes parallèles et égales aux arêtes du prisme, on a obtenu le développement de ce solide. Nous emploierons souvent, par la suite, ce moyen de développer la surface convexe d'un prisme ; il est plus commode et plus exact que la décomposition des faces en triangles.

284. La section perpendiculaire aux arêtes d'un prisme se nomme la *section droite.*

285. *Trouver les points où une ligne droite perce la surface d'un polyèdre*, **pl. 36.**

On fera passer par la droite un plan quelconque ; on cherchera la section du polyèdre par ce plan, et les points où la droite donnée rencontrera cette section seront les points demandés.

En faisant usage d'un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection, il est évident que la construction de la section du polyèdre par ce plan sera plus facile à obtenir.

Dans la figure **170, pl. 26** (a, a'), est la droite donnée. Si l'on mène par cette droite un plan vertical p, et que l'on construise la projection verticale de la section qui en résulte, les points (m, m'), (n, n') où cette section est rencontrée par la ligne aa', seront les deux points demandés. En construisant le plan p' perpendiculaire au plan vertical, et la projec-

tion horizontale de la section qui en provient, on aurait obtenu le même résultat.

296. *Étant donnée la projection verticale* a *d'un point que l'on sait appartenir à la surface d'un polyèdre, trouver la projection horizontale de ce même point.*

Cela revient à trouver l'intersection du polyèdre par la droite *cd*, **fig. 171**, menée par le point *a* perpendiculairement au plan vertical. Pour cela, menons par cette droite le plan horizontal *p*, et construisons la section du polyèdre par ce plan, nous obtiendrons pour cette section un polygone horizontal coupé par la droite *cd* en deux points a', a'', qui sont les projections horizontales des deux points appartenant à la surface du polyèdre, et ayant la même projection verticale *a*.

Si l'on donnait la projection horizontale *b*, et qu'il fallût trouver la projection verticale, on construirait un plan p' perpendiculaire au plan horizontal de projection, et la section du polyèdre par ce plan serait rencontrée par la verticale *eh* en deux points b', b'', qui seraient les projections des deux points de la surface du polyèdre qui se projettent horizontalement en *b*.

297. Pénétration des polyèdres. Toutes les fois que l'on coupe un polyèdre par un plan, la section est une figure plane ; mais lorsque deux polyèdres se pénètrent, il en résulte une figure rectiligne dont les côtés peuvent être dirigés dans toutes sortes de directions.

Pour obtenir les différents côtés qui composent cette figure, on cherchera les intersections de chacune des faces du premier polyèdre avec les différentes faces du second, et l'ensemble de ces intersections formera la figure demandée. Pour obtenir l'intersection des plans qui les contiennent chercher les traces de l'intersection de ces faces deux à deux, ou bien encore chercher les intersections des arêtes de l'une d'elles avec le plan qui contient l'autre ; mais il sera presque toujours plus simple d'opérer comme il suit :

298. Supposons, **fig. 172**, que le triangle (abc, $a'b'c'$)

appartienne à l'un des deux polyèdres proposés, et que le quadrilatère (*mnqs*, *m'n'q's'*) soit une des faces du second (289) ; en prolongeant les lignes (*ab*, *a'b'*) (*bc*, *b'c'*) jusqu'à leur rencontre avec le plan horizontal, on obtiendra la ligne *vu* qui représente la trace horizontale du plan qui contient le triangle. On cherchera de la même manière la trace *st* du plan qui contient le quadrilatère, et le point *hh'* où ces deux traces se rencontrent fera partie de l'intersection des deux faces proposées. Pour obtenir un second point de cette intersection on pourrait avoir recours aux traces verticales des mêmes plans ; mais comme il arrive souvent que ces traces sont situées hors de l'épure, il faudra opérer comme nous l'avons dit (77). On construira un plan horizontal *p*, qui coupera les plans du triangle et du quadrilatère suivant les deux droites *xy*, *rz*, dont le point de rencontre *kk'* sera un second point de l'intersection cherchée, de sorte que les projections de cette ligne seront (*kh*, *k'h'*). Quand on aura obtenu cette intersection, on en retranchera tout ce qui serait en dehors des faces données, et tout ce qui appartiendrait à l'une d'elles sans faire partie de l'autre ; de sorte que l'on ne conservera que la partie (*eo*, *e'o'*) commune aux deux faces données ; on passera ensuite à l'intersection de deux autres faces.

299. Il faudra opérer avec beaucoup d'ordre et de précision. Soit, **fig. 173**, un angle trièdre composé du pentagone *a*, du triangle *b*, et du quadrilatère *c* ; on veut avoir toutes les lignes provenant de sa pénétration dans un angle polyèdre composé des deux triangles *b'* et *c'*, et des deux quadrilatères *a'* et *d'*. On cherchera d'abord, par l'un des moyens indiqués plus haut, l'intersection des faces *a* et *a'*, et l'on ne conservera de cette intersection que la partie *mn* commune à ces deux faces ; et comme le point *n* fait encore partie de la face *a'*, on cherchera l'intersection de cette face avec *b*, ce qui donnera *a'b*, dont on ne conservera que la partie *no*. Arrivé là, il faut sortir de la face *a* ; mais comme le point *o* est dans l'intérieur de la face *b*, on cherchera l'intersection de cette face *b'* adjacente à *a'* ; ce qui donnera *bb'*, dont on ne conservera que la partie *oq*, commune aux

deux faces b et b'. On continuera à tourner de cette manière, jusqu'à ce que l'on soit revenu au point m, d'où l'on était parti ; ce qui formera le polygone provenant de la pénétration des deux polyèdres.

300. On remarquera qu'à chaque opération, l'extrémité du dernier côté obtenu devant faire partie de celui qui doit suivre, il suffira d'obtenir un point pour déterminer ce côté. Il n'y a donc que pour le premier côté qu'il faudra obtenir deux points ; le dernier sera déterminé par l'extrémité de celui qui précède, et par le point d'où l'on est parti ; de sorte que si l'on cherche un point du dernier côté, ce ne peut être que pour vérifier les constructions.

301. L'épure de la planche **37** a été construite d'après ces principes : on s'est proposé d'obtenir toutes les lignes provenant de l'*intersection d'un tétraèdre avec un prisme quadrangulaire.*

Je désignerai chacune des faces obliques par les deux lettres placées aux extrémités du côté suivant lequel cette face rencontre le plan horizontal. Ainsi :

Les trois faces obliques du tétraèdre seront ab, bc, ca.

Les quatre faces du prisme seront de, em, mn, nd..

En opérant comme il a été dit (298), l'intersection des faces

ab	avec	de,	donne	ou,
ab	. . .	em,	. . . .	ut,
bc	. . .	em,	. . . .	tx,
ca	. . .	em,	. . . .	xs,
ca	. . .	de,	. . . .	so ;

d'où résulte le polygone ($outrs$).

Ce polygone, que nous venons d'obtenir, est celui par lequel le sommet du tétraèdre pénétrerait dans le prisme quadrangulaire. En opérant de la même manière, on trouvera un second polygone ($iklgr$), par lequel le sommet du tétraèdre sort du prisme.

Voici l'ordre des opérations pour obtenir le second polygone ; l'intersection de

ab avec *nd*, donne *ik*,
bc . . . *nd*, ... *kl*,
bc . . . *mn*, ... *lg*,
ca . . . *mn*, ... *gr*,
ca . . . *nd*, ... *ri*.

302. Dans l'exemple que je viens de proposer, les deux polygones d'entrée et de sortie sont entièrement séparés l'un de l'autre, et dans ce cas on leur donne le nom de *pénétration* ; mais il pourrait se faire, si le tétraèdre était un peu reculé dans un sens ou dans l'autre, qu'il ne fût pas entièrement engagé dans le prisme ; alors les deux figures se mêleraient et n'en feraient qu'une seule, à laquelle, dans ce cas, on donnerait le nom d'*arrachement*.

303. Quand on a obtenu toutes les lignes provenant de la pénétration de deux corps, il reste à reporter ces lignes sur la surface même de ces corps ; ce qui peut se faire de deux manières.

304. Si les surfaces des deux corps que l'on se propose de construire devaient être composées de feuilles minces en tôle, carton ou autre matière que l'on puisse facilement développer, on en construirait d'abord toutes les faces comme nous l'avons dit (288), et l'on tracerait dans chacune de ces faces, et suivant leur véritable grandeur, toutes les lignes provenant de la pénétration de deux polyèdres ; de sorte que lorsque ces corps seraient reformés, toutes ces lignes nécessaires à leur assemblage se trouveraient tracées sur leur surface.

305. Si les corps étaient massifs comme ceux que l'on construit en pierre ou en bois, et qu'ils fussent exécutés, on construirait encore le développement comme nous venons de dire ; puis, prenant séparément chaque face de ce déve-

loppement, on découperait le contour de la pénétration, et en l'appliquant sur la face correspondante du solide, il serait facile de tracer cette figure dans sa véritable grandeur. Lorsqu'une face du développement est ainsi appliquée sur le corps, on lui donne le nom de *panneau* ou *patron*.

On pourrait encore, après avoir déduit de l'épure la distance de chaque sommet de l'intersection aux sommets du polyèdre, construire directement cette figure sur la surface du solide, sans en faire le développement.

306. On a rassemblé dans la planche **38** toutes les parties de ce problème. La figure **175** représente les données de la question, et la figure **176** en contient le résultat. On a, **fig. 177**, le développement du prisme, et la figure **178** est le développement du tétraèdre.

Pour obtenir dans le développement du prisme un point q qui n'appartient pas à l'une des arêtes, on mène par ce point, **fig. 176**, une droite qm, $q'm'$, parallèle aux arêtes du prisme, et l'on construit cette droite dans le développement, suivant sa véritable grandeur.

Pour le point ll', on a construit une ligne (ln, $l'n'$) passant par le sommet du tétraèdre.

LIVRE II.

CHAPITRE PREMIER.

Lignes courbes.

307. L'idée la plus simple que l'on puisse se former d'une ligne courbe, c'est de la considérer comme engendrée par le mouvement d'un point qui se détournerait infiniment peu à chaque pas.

308. Pour définir une courbe, il faut énoncer les conditions de sa génération. Ainsi, par exemple, une circonférence de cercle est une courbe engendrée par un point assujetti à se mouvoir dans un plan, de manière à rester toujours à égale distance d'un autre point de ce plan que l'on nomme *centre*.

309. Si toutes les positions du point générateur d'une courbe sont dans un même plan, on dit que *cette courbe est plane* ; dans le cas contraire, on la nomme *courbe à double courbure*. Nous verrons bientôt d'où vient cette dénomination.

310. Le nombre des positions successivement occupées par le point générateur étant infini, il est impossible de les construire toutes. Dans ce cas, on construit un certain nombre de ces points, très-rapprochés les uns des autres, et les joignant entre eux, on obtient une ligne qui diffère peu de la courbe que l'on se proposait de construire.

Il est évident que cela revient à considérer la courbe comme un polygone d'une infinité de côtés ; chacun de ces côtés, à cause de sa petitesse, peut être regardé comme *élément droit* de la courbe. Si on le prolonge, on a une ligne droite qui, en deçà et au delà, s'écarte du cours de la courbe, et ne se confond avec elle que suivant ce même élément. Cette ligne droite se nomme *tangente*, et l'élément infiniment petit qui lui est commun avec la courbe se nomme *point de tangence* ou de *contact*.

311. Il ne faut pas attacher à ce mot de tangente le même sens qu'en Géométrie : on voit, par ce qui précède, qu'une ligne telle que *ab*, **fig. 179, pl. 39**, qui toucherait une courbe au point *a*, pourrait la couper ailleurs. La ligne *ac*, menée par le point *a* perpendiculairement à la tangente, se nomme une *normale*.

312. Le point de tangence possède une propriété géométrique qui n'appartient pas au point de section. En effet, si on conçoit qu'une sécante quelconque *ao* tourne autour du point *a* dans le sens indiqué par la flèche, il est évident que le point *o* se rapprochera du point *a*, et lorsque ces deux points seront réunis, la droite que l'on aura fait tourner sera tangente.

Il résulte de là que le point de tangence est un point *double*, puisqu'il provient du rapprochement de deux points de section. C'est pourquoi il détermine complétement la direction de la tangente, par suite de ce principe de Géométrie, que par deux points on ne peut faire passer qu'une ligne droite, même lorsque ces deux points sont infiniment rapprochés.

Il n'en est pas de même du point de section *b*, qui, étant un point *simple*, ne suffit pas pour déterminer la direction de la sécante *bu*.

313. Cercle osculateur, rayon de courbure. Soit, **fig. 180**, une courbure *man*, la tangente *ac*, et la normale *ab*. Supposons qu'avec des rayons de différentes grandeurs on décrive plusieurs cercles passant par le point *a* et ayant leurs

centres sur la normale. Tous ces cercles toucheront au point *a* la courbe *man* et sa tangente *ac*, de sorte que les uns seront en dedans de la courbe, les autres passeront entre la courbe et la tangente ; mais il est évident que, parmi tous les cercles possibles, il y en aura un qui s'approchera plus de la courbe qu'aucun des autres ; on le nomme *cercle osculateur*. Sa courbure présente celle de la courbe au point *a*, et son rayon se nomme le *rayon de courbure*.

314. Si tous les points de la courbe n'étaient pas dans un même plan, on pourrait toujours concevoir trois points de cette courbe infiniment près les uns des autres. Ces trois points détermineraient le centre et le rayon du *cercle osculateur*, et le plan de ce cercle se nommerait *plan osculateur*. Il contiendrait l'arc extrêmement petit passant par les trois points qui déterminent sa position, et s'écarterait de la courbe en deçà et au delà de cet arc.

315. Quelquefois la courbure d'une courbe est constante comme dans la circonférence du cercle ; souvent elle est variable : tantôt le centre de courbure passe d'un côté à l'autre de la courbe ; alors de convexe qu'elle était, elle devient concave, comme on le voit en *a*, **fig. 181** ; dans ce cas le point *a* se nomme un point d'*inflexion :* ailleurs le point générateur, après avoir parcouru un arc *ab*, s'arrête brusquement pour se diriger suivant un autre arc tel que *bc*. Alors le point *b* se nomme *un point de rebroussement*. On pourrait bien regarder les deux arcs *ab*, *bc*, comme appartenant à deux courbes différentes qui aboutissent à un même point ; mais s'ils résultent tous deux des conditions qui déterminent le mouvement du point générateur, il vaut mieux les considérer comme les deux branches d'une même courbe.

Au reste, c'est dans les traités d'analyse qu'il faut étudier les propriétés des courbes. On y verra comment toutes les sinuosités et accidents de leurs cours sont représentés par les notions algébriques. Nous nous bornerons ici à l'exposé des constructions graphiques dont nous devons faire l'application plus tard.

316. Construction du rayon de courbure, de la normale et de la tangente. Le calcul algébrique, en permettant d'admettre dans toute sa rigueur l'hypothèse d'un nombre infini de côtés, fait connaître avec la plus grande exactitude la position des centres et des rayons de courbure, des normales et tangentes ; mais on peut, dans beaucoup de circonstances, se contenter des moyens que nous allons indiquer.

317. Soit **fig. 182**, la courbe *abcde* ; si l'on prend trois points *b*, *c*, *d*, très-rapprochés les uns des autres, le centre et le rayon du cercle passant par ces trois points pourront être pris pour le centre et le rayon du cercle osculateur en *c*, et cette hypothèse sera d'autant plus exacte, que les arcs *bc*, *cd*, seront plus petits. Il ne faudrait cependant pas, si l'on voulait obtenir ce centre par le moyen connu en Géométrie, prendre les points *b*, *c*, *d* trop près l'un de l'autre, car on perdrait, par la difficulté de la construction, l'exactitude que l'on aurait gagnée en se rapprochant de la vérité du principe.

318. Il résulte de ce que nous venons de dire que si, en un point *c* d'une courbe quelconque, on veut construire une tangente à cette courbe, on prendra deux points *b*, *d*, très-près et à égale distance du point *c* ; puis ayant joint *b* avec *d* par une ligne droite, il sera facile de construire la normale *co*, perpendiculaire sur *bd*, et la tangente *cm* perpendiculaire à l'extrémité de *co*.

319. Développantes et développées. Si par chacun des points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, **fig. 183**, pris sur une courbe quelconque, on conçoit une normale à cette courbe, chaque normale sera coupée par celle qui suit en un point ; la ligne qui passera par les points d'intersection de toutes ces normales contiendra tous les centres de courbure de la courbe donnée. En effet, on pourra considérer *ab* comme un petit arc de cercle dont *m* serait le centre, *bc* comme un second arc de cercle qui aurait son centre en *n* ; de sorte

que l'ensemble de ces petits arcs de cercle formera une courbe continue et sans cassure; car il est évident que si à l'extrémité de l'une des normales on mène une tangente à la courbe, cette tangente sera touchée en même temps par l'arc qui suit : d'où il résulte que ces deux arcs se toucheront et se raccorderont parfaitement.

On dit que deux arcs se raccordent, lorsqu'ils paraissent être le prolongement l'un de l'autre et ne former qu'une même courbe.

Cette manière d'envisager une courbe n'est rigoureusement exacte qu'autant que l'on suppose les arcs *ab*, *bc*, *cd* infiniment petits; car sans cela, ce serait plutôt une suite de petits arcs de cercle qui ne satisferait qu'approximativement à la définition géométrique de la courbe.

320. Si l'on imagine un fil attaché en *z*, et courbé suivant le contour de la ligne *zonm ;* en faisant mouvoir le point *a* suivant la courbe *abcde*, il est facile de voir que le fil se développera, que le point *m* décrira la courbe *msu*, et que le rayon de courbure s'accroîtra, à chaque instant, de la différence des deux normales passant par les extrémités de l'arc parcouru par le point *a* ; de sorte que la partie *uz* du dernier rayon pourra être regardée comme le *développement* de la courbe *zonm*. C'est cette propriété qui a fait donner à la courbe *abcde* le nom de *développante*, par rapport à la courbe *zonm* qui contient les centres de courbure, et que l'on nomme sa *développée*.

321. En regardant une courbe comme une suite de petits arcs de cercle, hypothèse suffisamment exacte pour un grand nombre d'applications, nous allons voir quel parti on peut tirer des principes précédents pour la construction des courbes.

322. *Étant donnée une ligne courbe, construire sa développante.*

On placera sur la courbe donnée un certain nombre de points très-rapprochés les uns des autres ; puis, après avoir mené une tangente par chacun d'eux, on prendra ce point

pour centre, et la tangente pour rayon de courbure de l'arc correspondant de la développante.

Ainsi, par exemple, étant donnée la courbe *mnoz* **fig. 183**, on construira les tangentes *ma*, *nb* ; puis du point *m* comme centre, avec le rayon *ma*, on décrira l'arc *ab* ; le point *n* sera le centre de l'arc *bc*, et ainsi de suite. Les courbes *abc*, *a'b'c'*, **fig. 184**, sont les développantes du cercle. On aurait pu en construire une pour chaque point du cercle, et l'on peut voir qu'en général une courbe a une infinité de développantes. La ligne *a''b''c''*, est la développante de *a'b'c'*.

323. La courbe *ab*, obtenue par le moyen que nous venons d'indiquer, n'est pas rigoureusement égale à la développante du cercle, puisque la définition de cette ligne suppose la construction d'un nombre *infini* de tangentes.

Pour obtenir plus de précision dans le tracé de la courbe, on mesurera le rayon en le portant avec le compas sur une échelle divisée avec le plus grand soin. Puis on calculera la circonférence au moyen de la formule $2\pi R$, ce qui donnera la longeur de la 16e tangente. On partagera cette longueur en 16 parties égales, et l'on portera 15 de ces parties sur la 15e tangente, 14 sur la 14e tangente, 13 sur la 13e, et ainsi de suite. Après quoi on tracera la courbe à la main, ou en cherchant les centres comme nous le dirons bientôt.

324. *Étant donnée une ligne courbe, construire sa développée.*

Il faudra mener, **fig. 183**, à la ligne proposée un certain nombre de normales très-près les unes des autres, puis on fera passer une courbe par les points d'intersection de ces normales consécutives.

La développée du cercle se réduit à un point.

Il ne semble pas que ces principes puissent être d'une grande utilité dans les applications, puisque la développante ne peut se construire qu'à l'aide de la développée, et que, réciproquement, on ne peut obtenir la développée que lorsqu'on a déjà la développante. Mais nous allons voir que l'on peut souvent éluder cette difficulté.

325. Lorsqu'une courbe provient, comme *abcde*, **fig. 183**, de la construction d'arcs de cercle successifs, on lui donne, dans les applications, le nom de *courbe à plusieurs centres*. On voit que ces sortes de courbes ne sont pas soumises dans toute l'étendue de leur cours à la même loi de continuité, c'est-à-dire que les conditions qui déterminent le mouvement du point générateur ne sont pas identiquement les mêmes depuis le commencement de la courbe jusqu'à son extrémité. Mais la facilité avec laquelle on peut construire, à l'aide d'un compas, ces imitations de courbe, les fait souvent préférer, dans les applications, aux courbes continues que l'on ne peut tracer qu'à la main.

326. Des courbes à plusieurs centres. La construction des courbes à plusieurs centres dépend de ce principe de géométrie, que *si deux cercles ont une tangente commune en un point de leur circonférence, ils se toucheront en ce point.*

327. Soit, par exemple, **fig. 185**, un arc de cercle *ab* ayant pour centre le point *c* ; il est évident que tout autre arc de cercle passant par le point *b* et qui aura son centre sur le rayon *cb* ou sur son prolongement, sera touché en *b* par le premier arc et se raccordera parfaitement avec lui.

On peut proposer deux questions principales sur les courbes à plusieurs centres.

328. 1re Question. *Faire passer une ligne courbe par plusieurs points donnés.*

Soient trois points *a*, *b*, *c*, **fig. 187**, on mènera les cordes *ab*, *bc*, et les lignes *dm*, *hn*, perpendiculaires sur les milieux de ces cordes ; puis du point *m*, pris où l'on voudra, sur *dm*, on décrira un premier arc *ab*. Quant au second arc *bc*, il doit avoir son centre sur la ligne *hn* perpendiculaire au milieu de *bc* ; mais pour qu'il se raccorde avec le premier arc, il faut qu'ils aient la même tangente au point *b*. Il faut donc que le centre du second arc soit sur le rayon *bm*. Il sera donc au point *n*, où les deux lignes *bm*, *hn* se rencontrent.

On voit que la question proposée est indéterminée, et que par trois points donnés on peut faire passer une infinité de courbes à deux centres, dont la forme dépend du centre que l'on choisit pour décrire le premier arc. Si l'on prenait le point *o* pour centre, les deux arcs n'en feraient qu'un ; si l'on décrivait le premier arc du point *p* sur la ligne *bp* perpendiculaire à *bc*, le rayon de courbure du second arc serait infini, et cet art se confondrait avec la corde *bc*, qui deviendrait tangente au premier arc.

329. On peut appliquer ces principes à la construction d'une courbe passant par tant de points que l'on voudra, et l'on reconnaîtra encore que la forme de la courbe dépend du centre du premier arc. Ainsi, **fig. 186**, en prenant ce centre en *i*, on a la courbe *abcde*, tandis que si l'on prend le point *o* pour premier centre, on obtient la courbe *ab'c'd'e*.

330. Pour obvier à l'inconvénient qui résulterait de cette indétermination, on tracera d'abord, **fig. 188**, au crayon et avec beaucoup de soin la courbe que l'on se proposera de construire ; puis après l'avoir partagée en parties égales par les points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, on fera passer par *b* une perpendiculaire sur *ac*, par *c* une perpendiculaire sur *bd*, et ainsi de suite. Toutes ces lignes pourront être considérées comme des normales à la courbe, et leurs intersections successives donneront les centres de courbure.

331. 2e Question. *Construire une courbe à plusieurs centres tangente à des droites données.*

Soient, **fig. 189**, les deux droites *ab*, *ac* ; on veut décrire une courbe qui les touche en *b* et en *c*. Pour cela, on construira d'abord *bo*, *ci*, perpendiculaires aux deux tangentes données, puis on décrira un premier arc *bd*, en prenant pour centre un point *o* situé où l'on voudra sur la droite *bo*, de manière, toutefois, que l'arc *bd* ne touche pas la tangente *ac*. Portant le rayon *bo* de *c* en *h*, on joindra le point *o* avec le point *h* par la droite *oh*, sur le milieu de laquelle on élèvera la perpendiculaire *si*, dont la rencontre avec la ligne *ci* donnera en *i* le centre du second arc. En effet, on aura $ih=io$,

et par conséquent $ih + hc = io + od$, puisque $od = bo = hc$. Donc le second arc tangent en c passera par le point d ; de plus, il se raccordera avec le premier arc, puisque si au point d on menait une perpendiculaire à od, elle le serait aussi au rayon id du second arc, d'où il suit que les deux arcs auraient une tangente commune en d, et se toucheraient en ce point.

Si le centre du premier arc était situé sur la ligne qui partagerait l'angle bac en deux parties égales, cet arc toucherait aussi la ligne ac au point u, éloigné du point a d'une quantité $au = ab$, et la partie droite cu remplacerait le second arc dont le rayon serait alors infini.

332. Si les deux tangentes étaient parallèles, on opérerait de la même manière. Enfin, si la courbe devait être assujettie à passer par un point donné, le problème serait déterminé.

Soient, par exemple, **fig. 190**, les deux droites ab, cd. On veut décrire une courbe qui touche ces deux lignes en b et en c, et qui passe par le point h. On construira bo, ci, perpendiculaires sur les deux tangentes ; on mènera de plus la corde bh, sur laquelle on élèvera la perpendiculaire vo. Le centre du premier arc sera déterminé par l'intersection de bo avec la perpendiculaire sur le milieu de bh; on fera ensuite $cu = bo$, et le centre du second arc sera donné par l'intersection de ci avec la perpendiculaire sur le milieu de ou. Le point de raccordement m sera sur le prolongement de io.

333. Si l'on veut construire une courbe tangente aux divers côtés d'un polygone quelconque, **fig. 191**, on commencera par l'indiquer au crayon avec le plus de régularité possible ; puis après avoir bien arrêté les points où l'on veut que la courbe touche le polygone, on joindra ces points deux à deux par des courbes à deux centres, du genre de celle que nous avons construite (331).

334. Lieux géométriques. Nous avons précédemment regardé une courbe comme représentant le chemin parcouru par un point qui se meut suivant une certaine loi ; mais

souvent on considère une ligne courbe comme étant le lieu où se trouvent réunis un nombre infini de points qui satisfont tous à certaines conditions données. Dans ce cas, la courbe prend le nom de *lieu géométrique* ; ainsi, la circonférence d'un cercle est le lieu de tous les points qui, dans un même plan, sont à égale distance d'un point donné que l'on nomme *centre*.

La droite qui partage un angle en deux parties égales est le lieu de tous les points également éloignés des côtés de cet angle.

Nous allons donner une idée de la construction de quelques lieux géométriques et de leur usage.

335. *Étant donnés un cercle et une droite, construire le lieu de tous les points à égale distance de la droite et de la circonférence du cercle.*

Soit **fig. 129, pl. 40**, la droite ap et le cercle qui a son centre en c. On abaissera de ce point une perpendiculaire sur la droite ap, et l'on prendra le milieu de la partie de cette perpendiculaire comprise entre la droite et la circonférence du cercle, ce qui donnera en o un point de la courbe cherchée. Pour en construire d'autres, faisons $od = oh$; menons au point h une ligne hu parallèle à ap, et décrivons du point c, comme centre, l'arc du. L'intersection de cet arc et de la droite hu donnera en u un second point de la courbe. En effet, on a $zu = ph = di = us$. Donc,

$$zu = us.$$

On construira de cette manière autant de points que l'on voudra.

Tout cercle qui, ayant son centre sur cette courbe, toucherait la droite donnée, serait aussi tangent au cercle donné.

336. Si l'on voulait construire *le lieu de tous les points à égale distance des deux cercles* c, e, on joindrait les centres par la droite ce, et le point x, milieu de nm, appartiendrait au lieu cherché. Prenant ensuite $xv = kx$, et décrivant vy, yk, des points c, e, comme centres, on aura en y un second point de la courbe cherchée. En répétant cette

construction, on aura autant de points que l'on voudra, ce qui déterminera la courbe *tx*.

Tout cercle ayant son centre sur cette courbe, et qui toucherait le cercle *c*, serait aussi tangent au cercle *e*.

C'est par une construction analogue que l'on a obtenu la courbe *pq*, qui contient les centres de tous les cercles qui sont touchés intérieurement par le cercle *c*, et extérieurement par le cercle *e*.

337. *Étant donnés trois cercles, que je désignerai par* a, b, c, **fig. 193**, *construire un cercle qui les touche tous les trois.*

On construira d'abord le lieu *mn*, qui contient les centres des cercles tangents aux cercles *a* et *b*. On construira de même le lieu contenant les centres des cercles tangents aux cercles *a* et *c*, et l'intersection des courbes *mn*, *pq* donnera en *x* le centre d'un cercle qui touchera les trois cercles donnés.

En construisant le lieu des centres des cercles qui touchent *b* et *c*, on obtiendrait une troisième courbe *rs* qui passerait encore par le point *x*, ce qui vérifierait les constructions.

On obtiendrait de la même manière les centres des cercles qui toucheraient extérieurement quelques-uns des cercles donnés, ou tous les trois. Dans le cas général, il y a huit cercles tangents à trois cercles donnés.

Je n'ai donné cette construction que comme un exemple d'application des lieux géométriques que nous emploierons par la suite dans plusieurs occasions ; mais on trouvera, dans les Traités de Géométrie ordinaire, d'autres moyens de résoudre les problèmes relatifs au contact des cercles.

338. *Étant donnés*, **fig. 194**, *un cercle dont le centre est en* a, *et un point* b *hors de ce cercle, construire le lieu contenant les pieds de toutes les perpendiculaires abaissées du point* b *sur les tangentes au cercle.*

On construira les tangentes *cd*, *eh*, *vo*, etc., et du point *b* on abaissera les perpendiculaires *bd*, *bh*, *bo*, ce qui donnera la courbe *mdhbosubkm*.

Voici encore quelques applications des lieux géométriques.

339. Courbes d'essai. *Soient donnés la courbe* bxc *et le point* a, **fig. 195**; *on demande de faire passer par ce point une tangente à la courbe.*

On construira un certain nombre de normales (318), puis abaissant du point donné une perpendiculaire sur chacune de ces normales, on aura le lieu *dxh*, qui contiendra les pieds de ces perpendiculaires, et le point *x*, provenant de l'intersection de cette ligne avec la courbe proposée, sera le point de tangence ; car il est évident que si, par ce point, on construit une normale *xo*, la droite *ax* sera perpendicutaire à cette normale, et par conséquent tangente à la courbe.

Pour ne pas faire de travail inutile, on commence par reconnaître quelle doit être à peu près la position du point de tangence, et l'on construit deux ou trois normales en deçà, et autant au delà de ce point.

340. Cette manière d'employer les lieux géométriques leur fait quelquefois donner le nom de *courbes d'essai.*

341. Tous les géomètres ont attaché une grande importance à la détermination rigoureuse des tangentes et des points de tangence : or, dans les applications, quelle que soit l'exactitude du principe dont on fait usage, on conçoit qu'il y aura toujours quelque erreur, que l'on pourra, dans le calcul, rendre aussi petite que l'on voudra, mais qui, dans les constructions graphiques, sera toujours dépendante de la perfection des instruments, ou de l'habileté de celui qui les emploie. Ainsi, par exemple, lorsqu'on veut faire passer une droite par un point, il est certain que l'erreur que l'on commet dépend du plus ou moins de finesse dans la pointe du crayon avec lequel on aura tracé cette droite.

Nous conclurons de là que, pour construire, par un point *a*, **fig. 196**, une tangente à la courbe *bxd*, on peut se contenter d'approcher une règle de manière que la ligne tracée par le point donné paraisse passer sur la courbe, sans augmenter la largeur du trait. Il est évident que la tangente sera, par ce moyen, aussi bien déterminée que si l'on avait obtenu d'abord le point de tangence ; puisque, dans l'un comme dans l'autre cas, la plus grande erreur ne pourra excéder la

largeur de la ligne tracée ; mais on conçoit que ce dernier moyen de construire une tangente laisse de l'incertitude sur la véritable place du point de tangence, et si l'on voulait déterminer ce point, on construirait plusieurs cordes parallèles à la tangente, et la courbe yx, contenant les milieux de toutes ces cordes, viendrait aboutir au point de tangence, et le déterminerait avec une exactitude suffisante pour la plupart des applications.

342. Ce moyen de construire une tangente ne peut être employé avec succès que lorsque la direction de la tangente est déterminée par un point extérieur ou par quelque autre condition. Si le point donné, par exemple, était sur la courbe, il est évident que la plus petite erreur, à droite ou à gauche de ce point, pourrait influer beaucoup sur la direction de la tangente, et par conséquent sur la position de tous les points qui dépendraient de la direction de cette ligne.

Dans ce cas, il serait indispensable de commencer par déterminer la normale, soit par la construction indiquée (318), soit par tout autre moyen résultant de la définition de la courbe.

343. *Construire une tangente à une courbe* cyd, *parallèlement à une ligne donnée* ab.

On construira, **fig. 197**, quelques normales, et d'un point a pris où l'on voudra sur la droite donnée, on abaissera une perpendiculaire sur chacune de ces normales. La courbe axz, qui passera par les pieds de toutes ces perpendiculaires, coupera la droite ab en un point x. Or si, par ce point, on construit la normale xo, elle sera évidemment perpendiculaire à la ligne ab, et son intersection avec la courbe donnée déterminera le point de tangence y et la tangente pq, qui sera parallèle à ab, comme on le demandait.

Pour mener par le point x la normale xo, on prolongera les normales que l'on avait construites pour obtenir le lieu axz. Les intersections successives de ces normales donneront un arc eo appartenant à la développée de cyd, et menant par le point x une tangente à la courbe eo, on obtiendra la normale ox.

344. On pourrait, **fig. 198**, pour construire la tangente demandée, se contenter d'approcher la règle parallèlement à la ligne donnée *ab*, et l'on tracerait la ligne *pq* de manière qu'elle passât sur la courbe sans augmenter la largeur du trait; puis on construirait quelques cordes parallèles à la ligne donnée, et la courbe *zx*, passant par les milieux de ces cordes, viendrait aboutir au point de tangence et le déterminerait avec une exactitude suffisante.

345. *Construire une tangente à deux courbes données.*

On approchera, **fig. 199**, une règle de ces deux courbes, ce qui déterminera la tangente *pq* avec une exactitude suffisante. Quant aux points de tangence, on mènera deux ou trois cordes parallèles à *pq*, et prenant les milieux des cordes tracées dans la courbe *czd*, on construira le lieu *uz*, qui déterminera le point *z*; on obtiendra de la même manière le point *x*.

346. *Partager un cercle en autant de parties égales que l'on voudra.*

Soit, par exemple, **fig. 200**, un cercle que l'on veut partager en sept parties égales.

On construira un rayon *va* et une ligne *bc*, perpendiculaire en un point quelconque pris sur le prolongement de ce rayon; puis ouvrant le compas d'une quantité que l'on jugera peu différente de la septième partie du cercle, on portera cette ouverture à partir du point *a*, en ayant soin de marquer sur la circonférence le sixième et le huitième point de division; faisant ensuite $bd = dc$, on joindra le point *b* avec le point 8, et le point *c* avec le point 6, par deux droites qui se couperont en *o*. Or, si le point *o* était sur la ligne *dv*, il est évident que les points 6 et 8 seraient symétriquement placés par rapport à cette droite, et que le septième point de division coïnciderait avec le point *a*; tandis que si le point *o* est au-dessus ou au-dessous de la ligne *dv*, on peut en conclure que l'on a pris une ouverture de compas trop grande ou trop petite.

Après trois ou quatre essais de ce genre, en diminuant ou augmentant un peu l'ouverture du compas, on obtiendra une

courbe qui coupera la ligne *dv* en un point *x*, et joignant ce point avec *b*, on déterminera l'extrémité de la septième partie de la circonférence.

Les points *b*, *c*, pouvant être pris à volonté, il faut les choisir de manière que la position du point *o* soit bien déterminée. Si l'on prenait ces points trop près du point *d*, les lignes *bo*, *co* se couperaient trop loin et suivant un angle trop aigu ; la courbe d'essai pourrait même se trouver à droite du point *d*, ce qui serait moins commode que dans l'exemple proposé.

347. La construction précédente a été employée, **fig. 202**, pour déterminer le tiers de l'arc *ab*.

Ce problème est connu sous le nom de *trisection de l'angle ou de l'arc*. J'en ai donné une solution plus simple au n° 431 du *Traité de Géométrie*.

348. De la manière de représenter les courbes planes. Soient deux droites AX, AY, que l'on supposera, pour plus de simplicité, rectangulaires entre elles ; la première se nomme l'*axe des abscisses*, la seconde est l'*axe des ordonnées* ; lorsqu'on parle de ces deux droites, on les nomme *axes coordonnés* ; le point A se nomme l'*origine*.

Si l'on conçoit un point *m* dans le plan YAX, et que, par ce point, on construise *mp* parallèle à la ligne AY, et *mq* parallèle à la ligne AX ; *mp* se nommera l'*ordonnée*, et *mq* sera l'*abscisse* du point *m* ; de sorte que la position du point *m*, par rapport aux axes AY, AX, sera déterminée lorsque l'on donnera son abscisse et son ordonnée.

Presque toujours on prend pour l'abscisse la partie A*p* de la droite AX comprise entre le point A et le pied de l'ordonnée.

Une courbe étant connue, lorsque l'on connaît la position de tous ses points, on peut faire pour chacun d'eux les constructions que nous venons d'indiquer. Ainsi, pour construire la courbe *abcdef*, **fig. 203**, il suffira de *construire l'abscisse et l'ordonnée correspondant à chacun de ses points*.

349. Si l'on voulait *copier une courbe ou la réduire*, il

faudrait copier ou réduire, d'après un rapport donné, les abscisses et ordonnées de chacun de ses points. Ainsi la courbe $a'b'c'd'e'f'$ représente la courbe *abcde* réduite à une dimension moitié.

Pour rectifier la courbe *abcdef*, c'est-à-dire pour avoir sa longueur absolue, on portera les arcs *ab*, *bc*, *cd* à la suite les uns des autres, ce qui donnera $a''b''c''d''e''f''$; il est bien entendu que les points *a*, *b*, *c*..., etc., doivent être assez rapprochés les uns des autres pour que l'on puisse, sans erreur sensible, prendre la distance de deux points consécutifs pour la grandeur de l'arc qui les joint.

Quelquefois, *pour définir une courbe, on énonce les relations qui doivent exister entre les abscisses et les ordonnées de ses points.*

Ainsi, par exemple, si l'on demandait une courbe telle que pour chaque unité d'augmentation de l'abscisse, l'ordonnée dût augmenter de la moitié de l'ordonnée précédente, on construirait les points *mnApq* à égale distance les uns des autres ; et en supposant que le point *a* soit donné sur la ligne AY, on construira *ma*, qui, par son prolongement, donnera le point *b*; *nb* donnerait le point *c* ; A*c* donnerait le point *d*, et ainsi de suite, en sorte que *abcd* ... *o* serait la courbe demandée. En effet, on aura :

$$cq : dr = \mathrm{A}q : \mathrm{A}r = 2 : 3 ;$$

donc,

$$2dr = 3cq \text{ et par conséquent } dr = \frac{3cq}{2} = cq + \frac{cq}{2} .$$

On voit que dans cette courbe les abscisses étant en progression par différence, les ordonnées correspondantes forment une progression par quotient. Cette propriété a fait donner à ces sortes de courbes le nom de *logarithmiques*.

350. Cycloïdes. Si l'on fait rouler la circonférence A, **fig. 217, pl. 41**, sur la droite 1-1^{v}, chacun des points de cette circonférence décrira une *cycloïde*.

Pour tracer la courbe parcourue par le point 1, on partagera la circonférence du cercle mobile en parties égales, que

l'on portera sur la droite directrice $1\text{-}1^{v}$, qui, par conséquent, sera égale au développement de la circonférence du cercle A.

Cela étant fait, si nous supposons que le point 5 de la circonférence mobile soit arrivé au point 5′, le point 1, générateur de la courbe, se sera élevé jusqu'à la hauteur à laquelle se trouvait le point 5, avant le commencement du mouvement. De sorte que le point 1′ sera déterminé par l'intersection de l'horizontale 5-1′ avec la circonférence qui touche la directrice au point 5′.

Par la même raison, le point 1″ sera déterminé par l'intersection de l'horizontale du point 6 avec la circonférence qui touche la directrice au point 5′, etc.

Les points 1 et 1^{v} sont deux points de rebroussement à droite et à gauche desquels le point 1 engendrera d'autres branches de cycloïdes égales à la première.

La courbe $mm'''m^{v}$ est une cycloïde *rallongée*. Elle représente le chemin parcouru par le point m situé sur le prolongement du rayon o-1 qui passe par le point générateur de la cycloïde principale.

La courbe $nn'''n^{v}$ est une cycloïde *raccourcie* engendrée par le mouvement du point n.

Les trois courbes $1\text{-}1'''\text{-}1^{v}$, $mm'''m^{v}$, $nn'''n^{v}$ peuvent se construire en même temps. Ainsi, lorsque le centre du cercle mobile sera parvenu au point o'', on tracera le rayon o''-1″ sur lequel on portera 1″-m'' égal à 1-m, et 1″-n'' égal à 1-n. Le point m'' appartient à la cycloïde rallongée et le point n'' à la cycloïde raccourcie.

351. Tangentes à la cycloïde. Lorsque le cercle mobile devient tangent au point 12′, le point générateur 1^{iv} se meut pendant un instant infiniment petit, comme s'il tournait autour du point 12′, d'où il résulte que la droite ac perpendiculaire au rayon $12'\text{-}1^{iv}$ sera tangente à la cycloïde.

Les mêmes raisons permettront de construire les deux droites $a'c'$, $a''c''$ tangentes aux cycloïdes rallongées et raccourcies, parce que le point 12′ peut être considéré comme le centre de trois arcs de cercle infiniment petits, tangents aux trois courbes $1\text{-}1'''\text{-}1^{v}$, $mm'''m^{v}$, $nn'''n^{v}$.

Il ne faut pas conclure de ce qui précède que la droite $12'$-1^{IV} soit le rayon de courbure de la cycloïde au point 1^{IV}. Le cercle v-1^{IV}-u est tangent à la courbe, mais il ne faut pas le confondre avec le cercle osculateur, qui doit avoir un rayon double de $12'$-1^{IV}. En effet, décrivons la circonférence A″ égale au cercle A générateur de la cycloïde, prolongeons 1^{IV}-$12'$ jusqu'au point 17, et traçons la corde 18-17, l'angle $12'$-17-18 sera droit.

Or, si nous supposons que l'on fasse rouler le cercle A″ sur la droite 18-19 parallèle à $1'$-$16'$, le point 17 engendrera une cycloïde égale à celle qui était engendrée par le point 1 du cercle A. Il y aura seulement cette différence que le point de rebroussement de la cycloïde 19-1^{V} sera sur la perpendiculaire élevée au milieu de $1'$-1^{V}.

L'angle $12'$-17-18 étant droit, puisqu'il est inscrit dans une demi-circonférence, la droite 1^{IV}-17, normale à la cycloïde 1-1^{IV}-1^{V}, sera tangente à la cycloïde 19-17-1^{V}, et par conséquent la seconde de ces deux courbes sera la développée de la première (322), la droite 1^{IV}-17, double de 1^{IV}-$12'$, sera le rayon de courbure au point 1^{IV}, et le point 17 sera le centre du cercle osculateur.

On peut encore conclure de ce qui précède que la droite 19-$1'''$ est égale au développement de l'arc 19-1^{V}, de sorte qu'en doublant cette droite 19-$1'''$, on aurait la longueur totale de l'arc 1-$1'''$-1^{V}, qui, par conséquent, est exactement égal à quatre fois le diamètre du cercle mobile A.

Pour mener une tangente à la cycloïde par un point extérieur ou parallèlement à une droite donnée, on peut employer les moyens indiqués aux nos 339, 343 ; ce qui sera d'autant plus exact, que la construction ci-dessus détermine les normales auxiliaires avec la plus grande précision.

On peut aussi opérer de la manière suivante.

On remarquera d'abord que l'angle $12'$-1^{IV}-20 étant droit, ses deux côtés doivent passer par les extrémités du diamètre $12'$-20. D'après cela,

Sur le diamètre $6'$-24 perpendiculaire à $1'$-1^{V}; on construira le triangle rectangle $6'$-24-22, dont un côté 24-22 passerait par le point donné p.

On recommencerait cette construction pour trois positions

du cercle mobile A, et la courbe *zx*, qui contient les sommets de tous ces triangles rectangles, rencontrera la cycloïde en un point 1^{VI}, qui sera le point de tangence demandé.

Pour construire *une tangente parallèle à une droite donnée kh*, on construira la corde 21-23 parallèle à la droite *hk*, et l'on fera glisser le cercle A′ parallèlement à lui-même, jusqu'à ce que le point 23 soit arrivé sur la cycloïde. La droite horizontale $23\text{-}1^{IV}$ remplace la courbe *zx* employée dans le problème précédent.

352. Épicycloïdes. Si, au lieu de faire rouler le cercle mobile A sur une ligne droite, on le faisait rouler sur la circonférence d'un autre cercle B, **fig. 218**, la courbe engendrée 1-1′-1″-1‴ se nommerait une épicycloïde.

Cette courbe se tracerait par des moyens analogues à ceux que nous avons employés pour la cycloïde. Il suffirait de remarquer que les lignes qui, dans l'exemple précédent, étaient droites et parallèles à la ligne $1\text{-}1^{V}$, sont ici remplacées par des cercles concentriques.

Ainsi, quand on aura fait l'arc 1-2′ du cercle directeur B égal à l'arc 1-2 du cercle mobile A, le point 1′ de l'épicycloïde demandée sera déterminé par l'intersection de l'arc de cercle 2-1′ et de la circonférence 2′-1′ qui touche au point 2′ le cercle directeur.

La courbe *m-m′-m″-m‴* est une épicycloïde rallongée engendrée par le point *m* situé sur le prolongement du rayon *o*-1, et la courbe *n-n′-n″-n‴* est une épicycloïde raccourcie engendrée par le point *n*.

Les tangentes à l'épicycloïde se construiront comme celles de la cycloïde. Ainsi, par exemple, lorsque le centre du cercle mobile sera parvenu au point *o″*, les points générateurs des trois courbes auront pris les positions *n″*, 1″, *m″*; en joignant ces points avec 2″, on aura les trois normales 2″-*m″*, 2″-1″, 2″-*n″*, et par suite les trois tangentes *a″c″*, *ac*, *a′c′*.

La courbe 1-1′-1″, **fig. 219**, est une épicycloïde intérieure. Elle est engendrée par le mouvement du point 1, lorsque le petit cercle A roule dans l'intérieur du cercle B. Le rapport des deux cercles étant ici comme 1 : 3, il en résulte que,

si on continue le mouvement, les points de rebroussement seront toujours situés à la même place, ce qui n'aurait pas lieu dans l'exemple précédent.

Les deux courbes $mm'm''$, $nn'n''$ sont engendrées par les points m et n.

La courbe $1''$-p serait engendrée par le point $1''$, si on faisait rouler le plus grand cercle B sur le petit cercle A'.

Enfin, on peut encore regarder comme un cas particulier des épicycloïdes la courbe vu engendrée par l'extrémité de la droite zv qui roulerait sur la circonférence B. Nous avons vu (322) que cette courbe était la *développante* du cercle.

Lorsque le rayon du cercle mobile est exactement la moitié du rayon du cercle directeur, l'épicycloïde intérieure devient un diamètre de ce dernier cercle.

En effet, nommons R le rayon du cercle directeur B, **fig. 221**, r le rayon du cercle mobile A, et supposons que ce dernier cercle soit parvenu en A', on aura

$$\text{arc } aC : 2\pi R = \text{angle } \alpha : 4 \text{ angles droits},$$
$$\text{arc } ac : 2\pi r = \text{angle } \alpha' : 4 \text{ angles droits}.$$

Mais

$$\alpha' = 2\alpha;$$

de plus,

$$R = 2r.$$

Par conséquent,

$$2\pi R = 4\pi r.$$

On aura donc

$$aC : 4\pi r = \alpha : 4,$$
$$ac : 2\pi r = 2\alpha : 4.$$

De là on tire

$$4aC = 4\pi r\alpha,$$
$$4ac = 4\pi r\alpha.$$

Donc

$$\text{arc } aC = \text{arc } ac.$$

Ainsi, quand le cercle mobile touchera le cercle directeur

au point *a*, le point C sera parvenu en *c*, et par conséquent il n'aura pas quitté le diamètre CD.

La droite 1-1″, **fig. 220**, est engendrée par le mouvement du point 1, lorsque l'on fait rouler le petit cercle A dans le cercle double B.

La courbe *mm′m″* est engendrée par le point *m*, et la courbe *nn′n″* par le point *n*.

353. Spirales. Si un point tourne autour d'un autre en s'éloignant ou se rapprochant de ce dernier point, la courbe engendrée est une *spirale*. La quantité dont le point générateur s'éloigne ou s'approche du centre pendant une révolution, la régularité ou l'accélération de ce mouvement suivant certaines lois déterminées peuvent donner lieu à une infinité de spirales différentes. Nous ne parlerons ici que de la courbe engendrée par un point qui se rapprocherait à chaque instant d'une quantité proportionnelle aux espaces angulaires parcourus ; ou autrement nous supposerons que le point générateur se meut uniformément sur une droite *ac*, pendant que cette ligne parcourt les espaces angulaires égaux, en tournant autour de l'une de ses extrémités ; ainsi, par exemple, on veut construire, **fig. 223**, la courbe parcourue par le point *a*, qui tournerait autour du point *c*, dont il se rapprocherait, à chaque révolution, d'une quantité *hk*, **fig. 222**. Cette courbe est connue sous le nom de *spirale d'Archimède*.

Construction de la spirale. On fera, **fig. 223**, *ao* égal à *hk*, puis, après avoir partagé *ao* en parties égales, en 8 par exemple, on tracera les 8 rayons *c*-1, *c*-2, *c*-3, etc., faisant entre eux des angles égaux.

Ensuite, du point *c*, comme centre, on décrira un arc de cercle par chacun des points de division de la droite *ao*.

Les intersections de ces arcs de cercle avec les rayons *c*-1, *c*-2, *c*-3, détermineront tous les points de la première révolution de la courbe demandée.

On opérera de la même manière pour la seconde et pour la troisième révolution.

La *tangente mu*, pouvant toujours être considérée comme

le prolongement d'un élément infiniment petit de la courbe, sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle *mnu*, dont la base *mn* doit être à la hauteur *nu* comme le développement du cercle, qui contient le point de tangence *m*, est à la quantité *hk* ; ou comme telle partie que l'on voudra du cercle *mm'* est à une partie correspondante de la droite *hk*.

Ainsi, par exemple, si on fait *mn* égale à $\frac{3}{8}$ de la circonférence *mm'*, il faudra faire *nu* égal à $\frac{3}{8}$ de *hk*.

Si on fait le triangle rectangle *mcx* semblable au triangle *mnu*, la droite *xm* sera normale au point *m*.

Enfin, en construisant plusieurs normales et opérant, comme nous l'avons dit aux nos 339, 343, on pourra toujours construire des tangentes par un point extérieur ou parallèlement à telle ligne donnée que l'on voudra.

354. Courbes du deuxième degré. On nomme *courbe du second degré* celle dont toutes les propriétés peuvent être exprimées par une équation du second degré.

Les constructions que nous allons indiquer sont les conséquences de ces propriétés, qu'il faut étudier dans les traites d'Algèbre appliquée.

Les courbes du second degré sont au nombre de trois, savoir : l'ellipse, la parabole, l'hyperbole.

355. Ellipse. L'ellipse est une courbe telle que *la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes pris dans son plan, et que l'on nomme foyers, est une quantité constante.*

On exprime ordinairement cette quantité par $2a$.

356. *Construction de l'ellipse.* De la propriété que nous venons d'énoncer, et que l'on peut regarder comme la définition de l'ellipse, il résulte deux moyens de construire cette courbe.

Soient, **fig. 205, pl. 42,** F et F' les deux foyers, on prendra le point F pour centre, et avec un rayon quelconque F*o*, on décrira un premier arc de cercle ; puis du point F' comme centre avec un rayon F'$o = 2a -$ F*o*, on décrira un second

arc. Le point où ces deux arcs se couperont doit appartenir à l'ellipse, car il est évident que la somme de ses distances aux deux foyers sera égale à $2a$. En décrivant les arcs au dessus et au dessous de la ligne qui joint les deux foyers, on peut obtenir en même temps quatre points de la courbe.

357. Le point A, milieu de FF′, se nomme *le centre de l'ellipse ;* toute ligne droite passant par ce point est un diamètre, et se trouve partagée par le centre en deux parties égales.

Le plus grand de tous les diamètres est celui qui contient les foyers ; on lui donne le nom de *grand axe*. Le plus petit, que l'on nomme *petit axe*, est toujours perpendiculaire au grand.

Il est facile de voir que le grand axe est égal à $2a$, car pour le point X, extrémité de ce grand axe, on doit avoir, comme pour tout autre point de la courbe, $XF + XF' = 2a$, mais comme $XF = X'F'$, il en résulte $X'F' + F'X = 2a$, ou enfin $XX' = 2a$.

Les distances Fu, $F'u$, d'un point de la courbe aux foyers, se nomment *rayons vecteurs*, et la distance Au se nomme simplement *rayon*. On voit que dans l'ellipse tous les rayons ne sont pas égaux. Le plus grand est AX, moitié du grand axe, et le plus petit rayon AY est la moitié du petit axe.

358. Le cercle est une ellipse dont les deux axes sont égaux et dans laquelle le centre et les foyers se confondent en un seul point.

359. Le second moyen de construire l'ellipse consiste à placer deux épingles aux foyers F et F′ ; puis, après avoir noué par les deux bouts un fil dont la longueur totale soit égale à $2a$ plus FF′, on tendra ce fil de manière qu'il prenne la forme du triangle $FF'u$, dans lequel les sommets F et F′ seront occupés par les deux épingles, et le point u par un crayon que l'on fera glisser en tendant toujours le fil. Il est évident que le contour du triangle étant représenté par la lon-

gueur du fil, que nous avons faite égale à $2a$ plus FF′ ; et la base FF′ de ce triangle ne changeant pas, il restera toujours $2a$ pour la somme des deux côtés variables, quelle que soit, du reste, la place où l'on conduira le crayon qui occupe le sommet u de ce triangle.

360. Une ellipse étant construite, on peut se proposer de retrouver son centre, ses axes et ses foyers. Pour cela, on mènera deux cordes parallèles vs, pq, et la droite passant par les milieux de ces cordes sera un diamètre. Le milieu A de ce diamètre sera le centre de la courbe. Du point A, comme centre, on décrira un cercle de manière à couper la courbe en quatre points qui seront toujours symétriquement placés ; puis, abaissant du centre des perpendiculaires sur les cordes qui joignent ces points deux à deux, on aura les axes de l'ellipse. Enfin, du point Y, comme centre, avec un rayon égal à la moitié du grand axe, on décrira un arc de cercle FkF′, qui par son intersection avec le grand axe déterminera les deux foyers.

361. En combinant les propriétés du cercle avec celles de l'ellipse, on en déduit *(Algèbre appl.)* que si un cercle et une ellipse, **fig. 206,** ont un axe commun X′X, et que l'on prenne sur cet axe une abscisse Ap (348), on aura toujours : l'ordonnée du cercle est à l'ordonnée correspondante de l'ellipse comme le grand axe est au petit axe.

De là résultent plusieurs moyens de construire l'ellipse lorsque l'on connaît les deux axes.

362. Du centre de l'ellipse avec des rayons égaux chacun à la moitié d'un axe, on décrira deux cercles concentriques ; on construira par le centre un rayon quelconque Am, qui coupera le plus petit cercle au point n ; puis construisant mo parallèle au petit axe, et no parallèle au grand, l'intersection de ces deux lignes donnera en o un point de la courbe. En effet, on aura

$$mp : op = \mathrm{A}m : \mathrm{A}n = a : b ;$$

ce qui est conforme au principe que nous venons de citer.

363. Mais de tous les moyens de construire les ellipses, le plus commode est celui que nous allons indiquer.

Après avoir tracé les deux axes AX $= a$, AY $= b$, **fig. 207**, on prend un morceau de carte que l'on taille bien droit en forme de petite règle ; puis, après avoir marqué sur cette carte et à partir de l'extrémité o, deux grandeurs $om = a$, $on = b$, on la fait mouvoir de manière que le point m ne quitte pas l'axe AY, et que le point n ne quitte pas l'axe AX. Dans ce mouvement, le point o décrira l'ellipse, de sorte qu'il suffira de marquer avec un crayon un certain nombre des points successivement occupés par le point o.

Cette manière de décrire l'ellipse résulte encore du principe énoncé (361) ; car si du point m, comme centre, avec un rayon mo, on décrivait un cercle, en prenant pour abscisse mp = AS, on pourrait considérer op comme l'ordonnée du cercle, et oS comme celle de l'ellipse, d'où l'on aurait encore :

$$op : oS = om : on = a : b.$$

364. Enfin, au lieu de prendre mn égale à la différence des demi-axes, on pourrait le faire égal à leur somme, et le point o placé entre les points m et n décrirait encore l'ellipse.

365. Étant donnés un des axes et un seul point, on peut construire l'ellipse.

Soit donné, par exemple, AX égal à la moitié du grand axe, et le point o appartenant à la courbe, on construira AY perpendiculaire sur AX. On prendra une ouverture de compas égale à AX, et du point o, comme centre, on décrira l'arc cs, dont l'intersection avec AY donnera le point m ; en joignant om, le point n sera déterminé, et la construction se fera comme précédemment.

366. Diamètres conjugués. Lorsque deux diamètres, XX′ YY′, **fig. 208**, sont tels que les tangentes aux extrémités de l'un d'eux sont parallèles à l'autre, on les nomme *diamètres conjugués ;* et si on les prend pour axes des abscisses

et ordonnées, on dit que l'ellipse est rapportée à ses diamètres conjugués.

367. *Construire une ellipse connaissant ses diamètres conjugués.*

Sur l'un d'eux, comme diamètre, on décrira la circonférence X*m*X′, et l'on construira le triangle A*m*Y dont les éléments sont donnés ; puis, sur une ordonnée quelconque du cercle, on fera un triangle *npq* semblable et parallèle à *m*AY: le point *q* appartiendra à l'ellipse. En recommençant, on obtiendra autant de points de la courbe que l'on voudra. Cette construction provient de ce que la propriété énoncée au numéro 361 convient aussi à l'ellipse construite sur ses diamètres conjugués.

Pour obtenir le grand axe, on joindra le centre avec le milieu de l'arc *c*X.

368. Tangentes à l'ellipse. Pour construire une tangente à l'ellipse, on pourrait opérer comme nous l'avons indiqué (318) ; mais la définition de la courbe et les propriétés qui en sont la conséquence fournissent des moyens plus rigoureux de résoudre ce problème.

369. *Construire une tangente à l'ellipse par un point donné sur la courbe.*

Le point *m* étant donné sur la courbe, **fig. 209**, on décrira du point A, comme centre, avec un rayon AX′ égal à la moitié du grand axe, l'arc de cercle X′*n*, qui coupera en *n* l'ordonnée passant par le point *m* ; on construira (*Géom.*) la droite *pn* tangente à cet arc en *n* ; et le point *p*, où cette tangente ira rencontrer le prolongement du diamètre XX′, appartiendra à la droite *pm*, qui est la tangente demandée. Cette construction vient de ce que si plusieurs ellipses ont un axe commun, et que par tous les points situés sur la même ordonnée on construise des tangentes, toutes ces lignes doivent concourir en un même point sur le prolongement de l'axe commun. Or, le cercle pouvant être considéré comme une ellipse, la

tangente au cercle détermine le point où doit aboutir celle de l'ellipse.

370. Une autre propriété de l'ellipse nous fournit un second moyen de construire la tangente.

Si par un point c de la courbe on mène des droites cX, cX', aux extrémités d'un diamètre, ces droites se nomment *cordes supplémentaires*, parce qu'à elles deux elles sous-tendent la demi-conférence de l'ellipse. Or, on sait que si par le point A on construit un rayon Am' parallèle à la corde cX', la tangente au point m' sera parallèle à la corde cX ; de là résulte cette construction.

Le point m' étant donné, on le joindra avec le centre par le rayon Am'; on construira la corde cX' parallèle au rayon Am'. Enfin, la corde supplémentaire cX donnera la direction de la tangente cherchée ; et comme on a déjà un point m' de cette tangente, il sera facile de la construire.

371. Enfin, un troisième moyen de solution résulte de cette propriété, que si en un point m'' de la courbe on mène une tangente et les deux rayons vecteurs (357), la tangente fera des angles égaux avec les rayons vecteurs, d'où résulte cette construction.

Après avoir déterminé les foyers F, F', on construira les deux rayons vecteurs Fm'', $F'm''$; on partagera l'angle $F'm''F$ en deux parties égales, ce qui donnera la normale km''. Enfin, la ligne qm'', perpendiculaire à la normale, sera la tangente demandée.

372. *Construire une tangente à l'ellipse parallèlement à une droite donnée.*

Soit os la droite donnée. On mènera d'abord la corde cX parallèle à la droite os, puis le rayon Am' passant le milieu de la corde cX déterminera le point de tangence, et par conséquent la tangente, qu'il sera facile de construire, puisque sa direction est donnée.

En prolongeant le rayon Am' on obtiendra sur la courbe un second point de tangence.

373. *Construire une tangente à l'ellipse par un point donné en dehors de cette courbe.*

Soit o le point donné, **fig. 210**. De ce point, comme centre, et prenant pour rayon sa distance à l'un des foyers, on décrira un premier arc $bF'c$; de l'autre foyer F, comme centre, avec un rayon égal au grand axe de l'ellipse, on décrira un second arc qui coupera le premier en deux points s, u. On joindra ces points avec le centre du second arc par deux droites dont les intersections avec la courbe seront les points de tangence.

En effet, le rayon du second arc étant égal au grand axe, on aura

$$sm' + m'F = 2a\,;$$

mais par la propriété de l'ellipse (355), on a

$$F'm' + m'F = 2a\,;$$

donc,

$$sm' = m'F'.$$

Ainsi, le triangle $sm'F'$ est isocèle ; mais le point o, centre du premier arc, est à égale distance des points s, F'. Donc la droite om' est perpendiculaire à sF', et partage l'angle $sm'F$, en deux parties égales. Donc enfin l'angle $om'F' = pm'F'$ et la droite op faisant des angles égaux avec les rayons vecteurs est une tangente (371). Il en est de même de la droite oq.

374. Parabole. *La parabole est une courbe telle que pour chacun de ses points la distance à une droite nommée directrice est égale à la distance à un point que l'on appelle foyer.*

Construction de la parabole. Soit, **fig. 211**, co la directrice, et le foyer F. Pour construire la parabole, on abaissera la perpendiculaire FD, et le point A, milieu de cette perpendiculaire, sera un point de la courbe. Pour en obtenir d'autres, on construira en un point p quelconque une perpendiculaire pm, et du point F, comme centre, avec un rayon

égal à pD, on décrira un arc de cercle qui coupera la perpendiculaire mp en deux points m, m', appartenant à la parabole. On recommencera jusqu'à ce que l'on ait un assez grand nombre de points pour construire la courbe.

375. On pourrait aussi construire la parabole par un mouvement continu.

Pour cela, on placerait une règle coïncidant avec la directrice co, et prenant une équerre cab, on attacherait au point b et au foyer F de la parabole un fil dont la longueur totale serait égale au côté ab. Or, il est évident que si l'on pousse l'équerre avec un crayon dont la pointe serait placée au sommet de l'angle u, afin de maintenir contre l'équerre l'une des parties bu du fil, l'autre partie uF de ce fil, qui représente la distance au foyer, sera toujours égale à la distance ua du point u à la directrice ; ce qui est conforme à la définition de la parabole (374).

La droite AX, qui passe par le foyer et qui est perpendiculaire à la directrice, se nomme le *grand axe*.

Une parabole peut être considérée comme une ellipse dont la distance des foyers serait infinie, la distance AE étant finie. Il est évident, d'après cela, que le centre est aussi à l'infini, ainsi que le second foyer.

376. Une parabole étant donnée, on peut se proposer de retrouver son *grand axe*.

On construira deux cordes parallèles, et la droite qs passant par les milieux de ces cordes sera un diamètre ; construisant mm' perpendiculaire sur qs, on en prendra le milieu p, ce qui donnera un point du grand axe que l'on mènera parallèlement à qs.

Cela vient de ce que dans la parabole tous les diamètres sont parallèles.

377. Tangente à la parabole. Si le point de tangence est donné sur la courbe, on construira, **fig. 212**, l'ordonnance mp passant par ce point ; puis, portant Ap de A en q, ce dernier point appartiendra à la tangente.

Cette construction résulte de ce que, *dans toute parabole, la distance* qp, *que l'on nomme la sous-tangente, est toujours double de l'abscisse du point de tangence.*

378. Si par le point v, milieu de qm, on mène une perpendiculaire à la tangente, le point F, où cette perpendiculaire rencontrera l'axe AX, sera le foyer de la parabole. Enfin, portant AF de A en D, et construisant la perpendiculaire cD, on aura retrouvé la directrice.

379. On peut encore, pour construire la tangente, opérer comme il suit :

On joindra le foyer F avec le point de tangence, par la droite Fm, et après avoir mené mF′ parallèle au grand axe AX, on partagera l'angle FmF′ en deux parties égales par la droite ms qui sera sa normale ; il ne restera plus qu'à mener au point m une perpendiculaire sur sm.

Dans cette construction, mF′ remplace le rayon vecteur allant aboutir au second foyer, situé à l'infini, comme nous l'avons dit plus haut.

380. Si l'on voulait mener *une tangente parallèle à une ligne donnée bc*, on construirait la corde Ad parallèle à cette ligne, et la droite um', menée par le milieu de Ad parallèlement à l'axe AX, déterminerait en m' le point de tangence ; ce qui suffit, puisque la direction de la tangente est donnée.

381. *Construire une tangente à la parabole, par un point situé en dehors de la courbe.*

Soit o, **fig. 23**, le point donné. On décrira de ce point, comme centre, et passant par le foyer, un arc de cercle uFs qui coupera la directrice aux deux points u, s ; on mènera par ces deux points et parallèlement à l'axe AX les droites sm', um'', dont les intersections avec la courbe seront les points de tangence.

Cette construction est analogue à celle que nous avons

donnée (373); la directrice remplace le cercle décrit du second foyer comme centre.

382. Hyperbole. L'hyperbole ne diffère de l'ellipse qu'en ce qu'au lieu de la somme, c'est la différence des rayons vecteurs qui est égale à une quantité constante que l'on nomme $2a$.

383. *Construction de l'hyperbole.*

Les foyers F, F′ d'une hyperbole étant donnés, ainsi que la quantité $2a$ qui est la différence des rayons vecteurs ; du point F′, comme centre, avec un rayon quelconque F′o, on décrira un arc de cercle ; ensuite du point F, comme centre, avec un rayon FO égal à F′O $+ 2a$, on décrira un second arc, et le point où ces deux arcs se couperont appartiendra à la courbe demandée.

384. On peut aussi décrire l'hyperbole par un mouvement continu. Pour cela, on attachera une règle par son extrémité, de manière qu'elle puisse tourner au milieu du foyer F′, puis au foyer F, et à l'autre extrémité de la règle, on attachera un fil dont la longueur totale $mc + c$F doit être égale à la longueur de la règle moins $2a$; il est évident que si l'on pousse la règle avec un crayon placé au point c ; quelle que soit la place où l'on conduira ce crayon, la partie cF du fil sera toujours égale à cF′ moins $2a$; ce qui est conforme à la définition de l'hyperbole.

385. Ici, comme dans l'ellipse, toute ligne telle que vn, qui passe par le milieu de deux cordes parallèles, se nomme un *diamètre*, et le point A, milieu de la portion de ce diamètre comprise entre les points où il coupe la courbe, se nomme le *centre*. Le diamètre XX′, qui passe par les foyers, se nomme l'*axe transverse*, et YY′, qui lui est perpendiculaire, se nomme l'axe *non transverse*. La portion BB′ de l'axe transverse est égale à $2a$.

386. Asymptotes. Il existe dans le plan de toute hyper-

bole deux droites qui jouissent de propriétés remarquables. Ces droites, AD, AE, passent par le centre de la courbe et s'en rapprochent sans jamais la toucher, ou, en d'autres termes, elles ne touchent la courbe qu'à l'infini. On leur donne le nom d'*asymptotes*.

387. Les asymptotes fournissent un moyen très-simple de construire une hyperbole lorsqu'on en connaît un point. En effet,

Soit donné le point *s* et les deux asymptotes DD′, EE′. On construira dans une direction quelconque, en passant par le point *s*, la sécante *pu*, et prenant *ps*, on le portera de *u* en *v*; ce qui donnera le point *v*. De même, construisant une autre sécante *si*, on portera *st* de *e* en *i*. En continuant ainsi dans toutes les directions, on aura autant de points que l'on voudra sur les deux branches de la courbe.

388. La courbe étant construite, le centre et les axes pourront être retrouvés comme dans l'ellipse. Pour obtenir les foyers, on décrira un arc du point A, comme centre, de manière à passer par le point *h*, où l'asymptote est rencontrée par l'ordonnée B*h* ; les intersections de ce cercle avec l'arc transverse seront les foyers.

On ferait l'opération inverse si l'on voulait construire les asymptotes, connaissant les foyers.

389. Tangentes à l'hyperbole. Les tangentes à l'hyperbole s'obtiennent par les mêmes moyens que les tangentes à l'ellipse.

Ainsi, par exemple, *m* étant le point donné, **fig. 215**, on construira le rayon A*m*, puis la corde B′*c* parallèle à ce rayon, enfin la corde supplémentaire *c*B, qui sera parallèle à la tangente et qui en déterminera la direction.

390. On peut encore, pour obtenir la tangente en un point donné de l'hyperbole, construire *pm* parallèle à l'asymptote, puis faisant A*o* = 2A*p*, le point *a* appartiendra à

la tangente. Cette construction provient de ce que, dans toute hyperbole, si l'on construit une tangente, le point de tangence doit toujours occuper le milieu de la portion de la tangente comprise entre les asymptotes.

391. Enfin, on peut encore construire la tangente en un point donné m', en construisant les deux rayons vecteurs $F'm'$, Fm' et partageant l'angle que ces rayons font entre eux, en deux parties égales.

392. Pour construire une tangente parallèle à une ligne donnée ts, on mènera d'abord la corde Bc parallèle à cette ligne, puis le rayon Am passant par le milieu de la corde Bc déterminera en m le point de tangence, et comme l'on connaît la direction de la tangente, il sera facile de la construire.

393 *Construire une tangente à l'hyperbole par un point pris en dehors de cette courbe.*

Soit o le point donné. De ce point, comme centre, on décrira un premier cercle passant par l'un des foyers F. De l'autre foyer F′ comme centre, avec un rayon égal à $B'B = 2u$, on décrira un second arc de cercle, et l'on joindra par deux droites les points d'intersection de ces deux cercles, avec le foyer F′ qui a servi de centre au second ; les points m', m'', où ces droites rencontreront la courbe, sont les points de tangence.

394. La similitude entre les constructions précédentes et celles que nous avions indiquées plus haut pour l'ellipse est une conséquence de l'analogie qui existe entre les propriétés des deux courbes.

395. Problèmes. *Diamètres conjugués de l'ellipse.*

Nous avons dit au n° 367 comment on peut construire une ellipse, lorsque l'on connaît deux quelconques de ses *diamètres conjugués.*

Cette question devant se présenter souvent par la suite, nous allons la reprendre avec quelques détails.

Étant donnés les deux diamètres AA′ et BB′, **fig. 1, pl. 43**, on décrira la circonférence qui a pour diamètre AA′ et l'on construira le triangle OMB. Cela étant fait, tout triangle omb, $o'm'b'$, etc., semblable et parallèle au triangle OMB, déterminera un point b, b', b'' de l'ellipse demandée. Mais on sait que dans la construction des courbes, il vaut mieux commencer par tracer un certain nombre de tangentes, parce que la courbe se confondant avec sa tangente dans le voisinage du point de tangence, cela permet de tracer la courbe avec une plus grande précision

On commencera donc par construire le parallélogramme EFGH, dont les côtés parallèles à l'un des diamètres donnés AA′ ou BB′ seront tangents aux extrémités de l'autre diamètre.

Ensuite, la tangente au point m' du cercle de rayon OA déterminera le point c' de la tangente au point b' de la courbe ; ce qui provient de ce que les deux tangentes $c'm'$ et $c'b'$ doivent avoir la même sous-tangente $c'o'$.

On obtiendra ainsi autant de tangentes que l'on voudra.

La tangente au point b'' ne rencontrant pas sur l'épure le prolongement du diamètre AA′, on construira d'abord la tangente $m''m'''$, puis le triangle $o'''m'''b'''$ semblable et parallèle au triangle OMB. Ce qui déterminera le point b''' et par suite la tangente $b''b'''$.

Le rayon OB de l'ellipse étant prolongé jusqu'au point m^{IV} du cercle, la droite $m^{\text{IV}}b^{\text{IV}}$, perpendiculaire au rayon Om^{IV}, sera tangente en même temps au cercle et à l'ellipse. On déterminera le point b^{IV}, en construisant le triangle $m^{\text{IV}}o^{\text{IV}}b^{\text{IV}}$, semblable et parallèle à OMB.

On déterminera de même le point b^{V} et la tangente $b^{\text{V}}m^{\text{V}}$; enfin, les deux points b^{IV} et b^{V} devront former les extrémités d'un diamètre $b^{\text{IV}}b^{\text{V}}$.

Si l'on trace MN et le rayon om^{VI} perpendiculaire sur MN, on obtiendra un point m^{IV} sur la circonférence du cercle ; la tangente $m^{\text{VI}}n$ parallèle à MN déterminera le point n sur le prolongement de AA′ et la droite nb^{VI}, perpendiculaire sur AA′, touchera l'ellipse en un point b^{VI}, que l'on obtiendra en

construisant le triangle $m^{\text{VI}}o^{\text{VI}}b^{\text{VI}}$ semblable et parallèle au triangle OMB.

On obtiendra de même le point b^{VII} et les deux points b^{VI} et b^{VII} seront les extrémités d'un diamètre $b^{\text{VI}}b^{\text{VII}}$.

396. *Trouver les axes d'une ellipse lorsque l'on connaît deux quelconques de ses diamètres conjugués.*

On sait qu'entre les axes et les diamètres conjugués d'une ellipse, on a toujours les relations suivantes :

$$(1) \qquad a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2,$$
$$(2) \qquad ab = a'b' \sin(\alpha' - \alpha)$$

la seconde équation multipliée par 2 deviendra

$$(3) \qquad 2ab = 2a'b' \sin(\alpha' - \alpha);$$

ajoutant les équations (1) et (3), on obtient

$$(4) \qquad a^2 + b^2 + 2ab = a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin(\alpha' - \alpha);$$

retranchant l'équation (3) de (1), on a

$$(5) \qquad a^2 + b^2 - 2ab = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin(\alpha' - \alpha);$$

en faisant pour simplifier

$$(6) \qquad a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin(\alpha' - \alpha) = m^2;$$
$$(7) \qquad a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin(\alpha' - \alpha) = n^2;$$

les équations (4) et (5) deviendront

$$a^2 + b^2 + 2ab = m^2,$$
$$a^2 + b^2 - 2ab = n^2;$$

extrayant la racine, on obtient

$$a + b = m,$$
$$a - b = n$$

d'où

$$a = \frac{m+n}{2} = \frac{m}{2} = \frac{n}{2};$$
$$b = \frac{m-n}{2} = \frac{m}{2} = \frac{n}{2}.$$

Il ne reste donc plus qu'à obtenir les valeurs de m et de n.

Or, si l'on exprime par u le complément de l'angle $(\alpha' - \alpha)$ que font entre eux les deux diamètres conjugués, on aura $\sin(\alpha' - \alpha) = \cos u$, et les équations (6) et (7) deviendront

$$(8) \qquad m^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b' \cos u,$$

$$(9) \qquad n^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos u;$$

mais *(Trigonométrie)* l'équation (9) exprime évidemment les relations qui existent entre les trois côtés n, a' et b' d'un triangle dans lequel le côté n serait opposé à l'angle u, complément de $\alpha' - \alpha$, et l'équation (8) exprime les relations entre les trois côtés d'un second triangle, dans lequel l'angle compris entre a' et b' serait égal au supplément de u. D'où résulte la construction suivante :

397. Soient, **fig. 3**, les deux rayons conjugués $OA' = a'$, $Od' = b'$. Il s'agit de trouver le demi grand axe $OA = a$ et le demi petit axe $OB = b$.

1° On mènera OA′ en OA″ par un quart de cercle A′A″ décrit du point O comme centre ; l'angle A″OB′ sera égal à u, complément de $B'OA' = \alpha' - \alpha$.

2° On construira le parallélogramme A″OB′D, et l'on tracera ses deux diagonales OD, A″B′.

La plus grande OD sera la valeur de m, et la plus petite A″B′ sera égale à n, ce qui donnera $OC = \frac{m}{2}$ et $A''C = \frac{n}{2}$.

3° Du point C, comme centre, on décrira la demi-circonférence HA″K, et l'on aura par conséquent

$$OH = OC + CH = OC + CA'' = \frac{m}{2} + \frac{n}{2} = a,$$

$$OK = OC - CK = OC - CA'' = \frac{m}{2} - \frac{n}{2} = b.$$

Les constructions précédentes donnent les valeurs des axes principaux $2a$ et $2b$; mais pour construire l'ellipse, il faut encore connaître les directions de ces axes.

Pour y parvenir, on décrira du point O la circonférence qui a pour rayon OH $= a$, cette circonférence coupera les côtés du parallélogramme conjugué en deux points M et N, par lesquels on tracera MF perpendiculaire sur IL, et NF perpendiculaire sur LG ; le point d'intersection F de ces deux lignes sera l'un des foyers de l'ellipse demandée.

Cela résulte de ce théorème connu, que la circonférence du cercle de rayon OA, **fig. 9**, doit contenir les pieds m des perpendiculaires abaissées des foyers F et F′ sur toutes les tangentes à l'ellipse, et par conséquent sur les deux droites IL et LG de la fig. 3.

Le foyer F et le centre O déterminent la direction du grand axe AA, et par suite celle du petit axe dont on connaît la grandeur BB, égale à 2 OK.

Pour plus d'exactitude, on fera bien de déterminer le foyer F′ en opérant comme le foyer F.

Si l'on prolonge les côtés du parallélogramme conjugué ILGP jusqu'à ce qu'ils rencontrent la circonférence de rayon OH, on aura les huit sommets de deux rectangles MM′M″M‴, NN′N″N‴, dont les côtés se couperont aux foyers F et F′ de l'ellipse demandée.

Enfin, si ces droites se coupaient suivant des angles trop aigus, on tracerait la droite XY, et la perpendiculaire PZ abaissée du point P sur cette droite devrait contenir le foyer F′.

Cela provient de ce que les perpendiculaires abaissées par les trois sommets sur les côtés du triangle PXY doivent passer par un même point (*Géométrie*).

398. La figure **2**, dégagée des lignes de vérification précédentes, ne contient que ce qui est absolument nécessaire pour déterminer les axes. Ainsi, on tracera :

1° Le quart de circonférence A′A″ et le rayon OA″ ; ce qui donnera l'angle A″OB′ $= u$, complément de $(\alpha' - \alpha)$;

2° On tracera la droite A″B′, dont on déterminera le milieu C ;

3° On décrira du point C la demi-circonférence HA″K, et l'on aura OH $= a$ et OK $= b$; puis on agira pour le reste comme nous l'avons dit plus haut.

399. Courbure des lignes du second degré. Nous avons dit, au numéro 316, que le centre et le rayon de courbure en un point d'une courbe donnée dépendent des propriétés géométriques de cette courbe, et, lorsque ces propriétés sont connues, on peut obtenir par le calcul le centre et le rayon du cercle osculateur. La nature de l'ouvrage actuel et le but auquel il est destiné ne permettent pas que nous donnions à cette question tous les développements dont elle est susceptible.

Il suffit presque toujours, en effet, dans la plupart des applications graphiques, de considérer comme cercle osculateur celui qui passe par trois points peu éloignés, et si l'on croyait utile d'obtenir une plus grande exactitude, on trouverait dans les traités d'Algèbre appliquée l'expression des rayons de courbure des lignes définies géométriquement.

Mais les courbes du second degré offrent dans les applications un intérêt tellement exceptionnel, que je crois être utile à quelques lecteurs en rappelant ici les formules qui permettent de construire, dans tous les cas, le centre et le rayon de courbure pour un point pris à volonté sur une de ces lignes.

400. Paramètre. Dans toute courbe du second degré, le *paramètre* est la corde qui passe par le foyer et qui est perpendiculaire à l'axe principal $2a$.

Ainsi, la droite désignée par GH, sur la figure **4**, est le paramètre de l'ellipse.

L'expression algébrique de cette corde est

$$\frac{4b^2}{2a} = \frac{2b^2}{a}.$$

Ainsi, en exprimant le paramètre par p, on aura

$$\mathrm{GH} = p = \frac{2b^2}{a}.$$

401. On démontre par l'Algèbre, que dans une courbe du second degré, *ellipse*, *parabole* ou *hyperbole*, le rayon de courbure AI au sommet A est toujours égal au *demi-para-*

mètre; donc, en exprimant ce rayon de courbure par r, on aura $r = \text{GF} = \frac{p}{2} = \frac{b^2}{a}$, d'où résulte la proportion $a : b = b : r$.

L'expression qui précède convient évidemment pour l'ellipse et pour l'hyperbole, mais dans la parabole les valeurs de a et de b étant infinies, l'expression $\frac{b^2}{a}$, quoiqu'elle soit exacte, ne donnerait plus une idée suffisamment nette de la valeur du rayon de courbure au sommet.

Or, on sait que dans toute parabole, **fig. 7**, le *paramètre* vaut quatre fois la distance AF du sommet au foyer; donc le double de cette distance sera le demi-paramètre ou le rayon de courbure au sommet A de la parabole.

Ainsi on aura : $r = \text{AI} = 2\text{AF} = \text{GF} = \frac{p}{2}$.

402. Normale. La normale, considérée comme exprimant une direction, est une droite infinie, menée par le point de tangence, et perpendiculairement à la tangente ; mais, lorsque la *normale* exprime une longueur, elle n'est plus infinie et se compte depuis le point de tangence jusqu'à sa rencontre avec le diamètre $2a$, lorsqu'il s'agit d'une courbe du second degré.

Par conséquent, sur les figures **4**, **7** et **8**, la normale correspondante au point M sera MK.

403. Rayon de courbure. On démontre, en Algèbre, que *le rayon de courbure en un point quelconque d'une ligne du second degré est égal au cube de la normale divisé par le carré du demi-paramètre.*

Ainsi, en exprimant la normale par n, le demi-paramètre par $\frac{p}{2}$ et le rayon de courbure par MC, on aura :

$$\text{MC} = \frac{n^3}{(\frac{1}{2}p)^2}.$$

Nous avons dit plus haut (401) que le *demi-paramètre* est le rayon de courbure au sommet, et puisque nous avons exprimé ce rayon par r, on aura :

$$MC = \frac{n^2}{r^2}$$

pour l'expression générale du rayon de courbure, en un point quelconque M d'une ligne du second degré.

La valeur de r étant une quantité constante, il s'ensuit que dans une ligne du second degré le rayon de courbure est toujours proportionnel au cube de la normale, et l'on reconnaîtra facilement que, dans la parabole et dans l'hyperbole, ce rayon augmentera depuis r jusqu'à l'infini, à mesure que le point d'osculation s'éloignera du sommet A de la courbe.

Mais il n'en sera pas de même dans l'ellipse, **fig. 6**, où le rayon de courbure atteindra sa valeur maximum, lorsque le point d'osculation sera parvenu à l'extrémité B du petit axe $2b$.

Dans ce cas, la normale BO sera égale à b, et le rayon de courbure que nous nommerons R deviendra

$$R = \frac{b^3}{r^2}.$$

Mais nous avons vu (401) que

$$r = \frac{p}{2} = \frac{b^2}{a}.$$

On aura donc

$$r^2 = \frac{b^4}{a^2},$$

d'où

$$R = \frac{n^3}{r^2} = \frac{b^3}{r^2} = \frac{b^3 a^2}{b^4} = \frac{a^2}{b}.$$

404. Ainsi, on aura pour l'ellipse, **fig. 4**

$$r = \frac{b^2}{a}; \quad MC = \frac{n^3}{r^2}; \quad R = \frac{a^2}{b},$$

$r = IA$ étant le plus petit rayon de courbure, MC le rayon de courbure en un point quelconque M, et $R = BS$ étant le plus grand rayon de courbure.

Ainsi, dans l'ellipse, le rayon de courbure à l'extrémité de a

est égal à $\frac{b^2}{a}$, et le rayon à l'extrémité de b est égal à $\frac{a^2}{b}$.

Pour la parabole et pour l'hyperbole on aura :

$$r = \frac{b^2}{a} = \frac{p}{2}; \quad MC = \frac{n^3}{r^2}; \quad R = \infty.$$

405. Construction du rayon de courbure en un point quelconque d'une courbe du second degré. L'expression algébrique de ce rayon en un point quelconque étant $\frac{n^3}{r^2}$, on aura

$$MC = \frac{n^3}{r^2} = \frac{n^2}{r} \times \frac{n}{r}.$$

Or, si nous exprimons pour un moment $\frac{n^2}{r}$ par x, nous aurons

$$MC = x \times \frac{n}{r} = \frac{nx}{r},$$

ce qui revient à la construction des deux formules suivantes :

$$x = \frac{n^2}{r}; \quad MC = \frac{nx}{r}.$$

D'après cela, on construira la tangente au point M en opérant par l'un des moyens connus, puis on fera, **fig. 4** :

1° MD égal au demi-paramètre GF ;

2° MN égal à la normale MK ;

3° On tracera DN ;

4° On construira NT perpendiculaire sur DN ;

4° La droite TC, perpendiculaire sur NT, coupera la normale NC en un point C qui sera le centre du cercle osculateur au point M.

En effet, les deux triangles DMN, NMT, étant semblables, on aura la proportion

$$DM : MN = MN : MT,$$

d'où

$$r : n = n : MT,$$

et, par conséquent,

$$MT = \frac{n^2}{r} = x.$$

Mais la similitude des triangles DMN, TMC donnera

$$DM : MN = MT : MC,$$

d'où

$$r : n = x : MC,$$

et, par suite,

$$MC = \frac{nx}{r} = \frac{n}{r} \times \frac{n^2}{r} = \frac{n^3}{r^2}. \qquad (403)$$

Ainsi, le centre C et le rayon de courbure MC seront déterminés.

La construction qui précède convient, sans aucune modification, à toutes les courbes du second degré ; c'est pourquoi les mêmes lettres ont été employées sur les figures **4**, **7** et **8**.

406. On peut obtenir le plus grand rayon de courbure BS, **fig. 4**, en traçant :

1° La droite BF qui joint le point B avec le foyer ;

2° La droite FS perpendiculaire sur BF.

Ce qui donnera le centre S et le rayon R = BS du cercle osculateur au point B.

En effet, le triangle BFS étant rectangle en F, on aura la proportion

$$BO : BF = BF : BS,$$

ou

$$b : a = a : BS;$$

d'où

$$BS = \frac{a^2}{b} = R. \qquad (404)$$

407. Dans les opérations qui précèdent, nous avons pris, pour *demi-paramètre*, la moitié GF de la corde perpendiculaire à l'axe $2a$ et passant par le foyer.

Cela fait dépendre le demi-paramètre de l'exactitude avec laquelle la courbe aurait été tracée, mais on peut obtenir facilement le demi-paramètre sans tracer la courbe ; en effet,

si nous construisons la droite OU perpendiculaire sur BF, le triangle BOF étant rectangle en O, on aura la proportion

$$BF : BO = BO : BU,$$

d'où

$$a : b = b : BU ;$$

et, par conséquent,

$$BU = \frac{b^2}{a} = r = \frac{p}{2}. \qquad (404)$$

408. Pour la parabole, on sait que le demi-paramètre est égal à deux fois AF (401).

409. Dans l'hyperbole, **fig. 8**, on tracera BI perpendiculaire à l'asymptote OH, ce qui donnera la proportion

$$OA : AB = AB : AI,$$

d'où

$$a : b = b : AI,$$

et, par conséquent,

$$AI = \frac{b^2}{a} = r = \frac{p}{2}. \qquad (404)$$

410. On peut, par une opération extrêmement simple, obtenir en même temps le plus petit et le plus grand rayon de courbure d'une ellipse ; pour cela **(fig. 6)** on tracera :

1° Les droites AE et BE perpendiculaires aux extrémités des axes principaux ;

2° La corde AB ;

3° La droite ES, perpendiculaire sur AB, coupera les deux axes de l'ellipse aux points I et S qui seront les centres du plus petit et du plus grand cercle osculateur.

En effet, les triangles BEA, EAI seront semblables et donneront la proportion

$$BE : EA = EA : AI,$$

d'où

$$a : b = b : AI,$$

et, par conséquent,

$$AI = \frac{b^2}{a} = r = \frac{p}{2}. \qquad (404)$$

Mais les deux triangles semblables BEA, EBS donneront

$$EA : EB = EB : BS,$$

d'où

$$b : a = a : BS,$$

et, par conséquent,

$$BS = \frac{a^2}{b} = R. \qquad (404)$$

411. Développée de l'ellipse. L'opération du n° 115 étant répétée pour un grand nombre de points pris à volonté sur le quart de l'ellipse BMA, **fig. 5,** on obtiendra les centres et les rayons de courbure correspondants, ce qui déterminera la courbe ICS pour la développée de AMB, et si l'on opère de la même manière pour les trois autres quarts de l'ellipse, on obtiendra la courbe SIS'I' qui forme la développée complète de l'ellipse.

Pour mieux faire sentir la forme de cette courbe, j'ai indiqué par une teinte tout l'espace dont elle détermine le contour.

On remarquera que cette courbe contient quatre points de rebroussement, qui sont les centres de courbure principaux de l'ellipse.

Tout point pris à volonté sur l'une des quatre courbes SI, IS', S'I', I'S sera le centre de courbure correspondant à un point de l'ellipse, de sorte qu'en prenant pour centres un certain nombre de ces points, on pourra tracer avec le compas une courbe qui différera aussi peu que l'on voudra de l'ellipse demandée.

412. La courbe SIS'I' peut encore servir pour construire des normales à l'ellipse, par un point pris à volonté dans son plan.

Ainsi, par le point V, situé dans l'intérieur de l'espace limité par la courbe SIS'I', on pourra construire quatre normales, savoir :

M'N' tangente à la courbe S'I,
M''N'' — — SI',
M'''N''' — — S'I',
$M^{IV}N^{IV}$ — — S'I'.

Deux de ces normales sont tangentes à l'arc S'I', situé comme le point V dans l'angle droit BOA', formé par les deux diamètres principaux de l'ellipse, tandis qu'aucune des quatre normales n'est tangente à l'arc IS, situé dans l'angle droit opposé AOB'.

Si le point V coïncidait avec le centre O de l'ellipse, les quatre normales se confondraient avec les axes AA' et B'B ; et si le point V était situé sur l'un de ces axes, deux seulement des normales se confondraient avec cet axe, et les deux autres normales seraient placées symétriquement par rapport aux premières.

Si le point V appartenait à l'un des arcs de la développée SIS'I', les deux normales tangentes à cet arc se réduiraient à une seule, et l'on n'obtiendrait, dans ce cas, que trois normales à l'ellipse.

Enfin, par l'un des quatre points de rebroussement, ou par tout autre point pris où l'on voudra en dehors de la courbe SIS'I', on ne pourra construire que deux normales.

On obtiendra de la même manière les développées et les normales de l'hyperbole, **fig. 8**, et de la parabole, **fig. 7**.

413. Rectification des lignes courbes. On ne connaît, jusqu'à présent, que deux méthodes pour obtenir la longueur d'une courbe, savoir : le calcul intégral ou la rectification graphique du polygone inscrit. Mais les difficultés souvent insurmontables des intégrations, et la longueur des calculs nécessaires pour obtenir le résultat par cette méthode, rendent à peu près inutiles les formules indiquées par la théorie.

414. Les praticiens se bornent à rectifier graphiquement le polygone inscrit, et considèrent le résultat ainsi obtenu comme suffisamment exact : ce qui est vrai dans le plus grand nombre de cas.

En effet, **fig. 8**, **pl. 44**, dans une épure de coupe de pierres, pour la construction d'une voûte ou d'un arc de pont, dont le cintre KH aurait un très-grand rayon de courbure, il est évident que, si l'on remplace cette courbe par le polygone ABC...D, l'erreur sera tout à fait insensible, par suite du

différence qui existe entre chacune des cordes et la partie de courbe qu'elle sous-tend.

On peut même ajouter que, pour la solidité de la construction, l'erreur sera *absolument nulle*, pourvu, **fig. 7**, que les surfaces de joint CD rencontrent les cordes DD suivant des angles parfaitement identiques avec ceux qui sont indiqués par l'épure. Il en résultera seulement qu'après l'exécution on aura construit un berceau prismatique au lieu d'un berceau cylindrique qui était projeté. Mais il est évident qu'en taillant la surface cylindrique après la pose, ou après le tracé des joints sur les faces de tête, on rétablira la courbure demandée, quel que soit le rayon de la voûte.

Il est donc certain que, dans un grand nombre de cas, on pourra remplacer la ligne donnée par le polygone qui lui est inscrit.

Cependant il peut exister des circonstances où l'on aurait besoin de connaître la longueur d'une courbe avec une grande exactitude. Il est vrai qu'en choisissant un plus grand nombre de points sur la ligne que l'on veut rectifier, on diminue la différence qui existe entre chacune des cordes et l'arc sous-tendu ; mais, d'un autre côté, on multiplie le nombre des erreurs, et, par conséquent, on perd d'un côté ce que l'on avait gagné de l'autre.

415. Il est évident que l'on sera beaucoup plus près de la vérité, si l'on remplace chacun des côtés du polygone inscrit par un arc de cercle, dont la différence avec la partie correspondante de la courbe donnée pourra toujours être aussi petite que l'on voudra. De sorte que la question sera réduite à rectifier la courbe formée par les arcs de cercle par lesquels on aura remplacé les côtés du polygone inscrit.

416. Pour atteindre ce but, exprimons, **fig. 1**, l'arc de cercle MKN par a, l'angle MON par α, la corde MN par c et le rayon OM par R. On aura (*Géométrie*) :

(1) $$a = \frac{\pi R \alpha}{180};$$ mais

(2) $$c = 2\text{MI} = 2\text{R} \sin \tfrac{1}{2}\alpha,$$ d'où

(3) $$\frac{a}{c} = \frac{\pi\alpha}{368 \sin \frac{1}{2}\alpha}.$$

Ainsi, le rapport d'un arc à sa corde ne dépend que du nombre de degrés de cet arc, quel que soit le rayon du cercle auquel cet arc appartient.

417. Cela étant admis, supposons qu'il s'agit de rectifier une courbe quelconque.

On choisira sur cette ligne des points assez rapprochés pour que la courbure des arcs compris entre deux points consécutifs soit sensiblement uniforme, puis on tracera les cordes qui forment les côtés du polygone inscrit.

Or, en exprimant ces cordes par c, c', c'' et c''', les arcs de cercle sous-tendus par a, a', a'', a''', et les angles formés par les normales consécutives par α, α', α'', on aura (416) :

$$a = c \times \frac{\pi\alpha}{360 \sin \frac{1}{2}\alpha}$$

$$a' = c' \times \frac{\pi\alpha'}{360 \sin \frac{1}{2}\alpha'}$$

$$a'' = c'' \times \frac{\alpha\pi''}{360 \sin \frac{1}{2}\alpha''}$$

etc. . . . . .

Puis, en exprimant la courbe rectifiée par L, on a

$$\text{L} = \frac{\pi\alpha c}{260 \sin \frac{1}{2}\alpha} + \frac{\pi\alpha' c'}{360 \sin \frac{1}{2}\alpha'} + \frac{\pi\alpha'' c''}{360 \sin \frac{1}{2}\alpha''} + \ldots .$$

Or si l'on fait $\alpha = \alpha' = \alpha''$, on aura :

$$\text{L} = \frac{\pi\alpha}{360 \sin \frac{1}{2}\alpha}(c + c' + c'' + \ldots \text{etc.})$$

Le tout sera donc réduit :

1° *A remplacer la courbe donnée par une suite d'arcs de cercle semblables entre eux ;*

2° *A rectifier le polygone formé par les cordes qui sous-endent ces arcs de cercle ;*

3° *A multiplier le résultat obtenu par* $\frac{\pi\alpha}{360 \sin \frac{1}{2} \alpha}$.

418. Ainsi, par exemple, pour rectifier la partie de courbe comprise, **fig. 2**, entre les normales AH et FK, dont nous supposons la direction bien exactement déterminée :

1° On tracera par un point O, pris à volonté, **fig. 1**, les deux droites OA′, OF′ parallèles aux normales extrêmes HA et KF de la courbe que l'on veut rectifier;

2° On partagera l'angle A′OF′ en autant de parties égales que l'on supposera d'arcs de cercle dans la ligne par laquelle on veut remplacer la courbe donnée, et l'on tracera un rayon par chacun des points ainsi obtenus sur A′F′;

3° On construira une normale à la courbe donnée, **fig. 2**, *parallèlement à chacun des rayons de l'arc* A′F′.

Ces normales partageront la ligne donnée en une suite d'arcs *semblables entre eux*, et semblables en même temps à chacune des parties égales de l'arc de cercle A′F′.

419. On remarquera que les arcs semblables suivant lesquels on aura ainsi décomposé la courbe donnée seront proportionnels à leurs rayons, et deviendront, par conséquent, plus petits dans la partie de cette courbe où la courbure sera plus grande, ce qui augmentera beaucoup l'exactitude du résultat, quand même on négligerait la multiplication par le coefficient $\frac{\pi\alpha}{360 \sin \frac{1}{2} \alpha}$.

420. Lorsque l'on aura déterminé les points qui partagent la courbe donnée, **fig. 2**, en autant d'arcs semblables qu'il y a de parties égales dans l'arc de cercle A′F′, **fig. 1**, il ne restera plus qu'à exécuter les opérations suivantes :

1° On tracera les cordes AB, BC, CD, etc., de chacun des arcs suivant lesquels on a décomposé la courbe donnée AF;

2° On fera la somme de toutes ces cordes, ou, ce qui est la même chose, on rectifiera le polygone inscrit ;

3° On multipliera le résultat obtenu AF″ par $\frac{\pi\alpha}{360 \sin \frac{1}{2} \alpha}$.

421. Si l'angle A'OF', **fig. 1**, que font entre elles les deux normales extrêmes AH et FK de la figure **2**, n'est pas donné en nombre, on pourra obtenir cet angle avec un bon rapporteur, et même avec un rapporteur médiocre. Pour cela, on mesurera l'angle plusieurs fois, en partant successivement des points 0, 10, 20 de l'instrument, puis on prendra une *moyenne ;* ce qui n'est autre chose que le principe de la *répétition* appliqué à un instrument commun.

Supposons que, dans l'exemple actuel, l'angle A'OF' soit égal à 145 *degrés;* on aura $\alpha = \frac{145}{5} = 29$, et le facteur $\frac{\pi\alpha}{360 \sin \frac{1}{2}\alpha}$ deviendra $\frac{29\pi}{360 \sin (14°\text{-}30')} = 1{,}011$.

Ainsi la droite AF'' mesurée avec soin, et multipliée par 1,011, sera la longueur de la courbe rectifiée.

422. Pour mesurer la droite AF'', on emploiera un mètre bien divisé ; et si l'on compte la longueur successivement à partir des points 0, 10, 20, 30 *millimètres*, etc., on pourra, en prenant la moyenne, obtenir beaucoup d'exactitude (421).

423. Si l'on a bien compris tout ce qui précède, il est évident que le problème de la rectification des courbes se trouve réduit à remplacer la ligne donnée par une suite d'arcs de cercle *semblables entre eux*, et dont les extrémités seront déterminées par *les normales parallèles aux rayons qui partagent en parties égales l'angle des normales extrêmes;* d'où il résulte que la question peut être considérée comme complétement résolue pour toutes les courbes auxquelles on sait mener une normale *parallèlement à une droite donnée.*

Lorsque la courbe à rectifier, **fig. 2**, ne sera pas définie géométriquement, on pourra se contenter de construire avec soin la développée KH, en opérant comme je l'ai dit au commencement du second livre de *Géométrie descriptive,* puis on construira une tangente à la développée, parallèlement à chacun des rayons de l'arc A'F', **fig. 1**. Ces tangentes seront normales à la courbe donnée AF, et partageront cette ligne

en arcs que l'on pourra considérer comme semblables; mais lorsqu'il s'agira d'une courbe définie, on pourra toujours construire les normales avec une grande exactitude.

Ainsi, par exemple, si la courbe donnée est du second degré, on pourra opérer de la manière suivante.

424. Normales de l'ellipse. *Première méthode*, **fig. 4 :**

1° On tracera la corde VU perpendiculaire à la direction GO de la normale que l'on veut obtenir;

2° On joindra le centre de l'ellipse avec le milieu I de la corde VU, par le diamètre C-6, dont les extrémités détermineront les points C et 6 sur la circonférence de l'ellipse ;

3° Les deux normales CS, 6-X perpendiculaires sur VU seront par conséquent parallèles à GO.

Remarque. Si la corde VU est trop près du centre, la direction du diamètre C-6 sera mal déterminée, tandis que si la corde est trop loin, elle coupera la courbe trop obliquement, et le point I ne sera plus déterminé avec une exactitude suffisante.

Il sera donc utile, dans ce cas, de vérifier la position de la normale demandée.

425. *Deuxième méthode :*

1° On décrira la circonférence MKN, qui a pour diamètre le grand axe MN de l'ellipse donnée ;

2° On tracera par l'un des foyers F, la droite FK parallèle à la ligne donnée GO.

Le point K, suivant lequel FK rencontrera la circonférence MKN, doit appartenir à la tangente CK ;

3° On portera FK de K en H, sur le prolongement de FK, et l'on joindra le point H avec le second foyer F′ par une droite HF′, dont l'intersection avec la courbe déterminera le point C, et par suite la normale CS parallèle à FK, et, par conséquent, à GO.

Au lieu de FK, on peut tracer F′K′, dont l'intersection avec la circonférence MKN donnera le point K′.

On fera K'H' égal à K'F', et la droite H'F déterminera le point C sur la tangente K'K et sur la circonférence de l'ellipse.

426. Vérifications. La normale CS doit partager l'angle FCF' en deux parties égales, et le point H doit être situé sur l'arc LP décrit du point F' comme centre, avec un rayon égal à $2a$.

Enfin, le point H' doit être situé sur l'arc QY décrit avec le même rayon du point F comme centre.

427. Normales de la parabole. *Première méthode* **fig. 9 :**

1° On tracera une corde VU perpendiculaire à la direction donnée GO de la normale que l'on veut obtenir ;

2° La droite CF', parallèle à l'axe principal de la parabole, et passant par le milieu I de la corde VU, déterminera le point C sur la courbe ;

3° La droite CS perpendiculaire sur VU, et par conséquent parallèle à GO, sera la normale demandée.

428. *Deuxième méthode.*

1° Le point K, suivant lequel la droite FK parallèle à GO coupe l'ordonnée tangente au sommet M de la courbe, appartient à la tangente CK ; car la droite MK est pour la parabole le lieu qui contient les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer F sur les tangentes à la courbe ;

2° On tracera la tangente CK perpendiculaire sur FK ;

3° L'abscisse MP' étant reportée de M en P, on connaîtra l'ordonnée qui contient le point C, et l'on pourra construire la normale CS parallèle à GO.

429. *Troisième méthode.*

La droite FK, prolongée jusqu'à la directrice RH de la parabole, déterminera le point H, par lequel on tracera HF' parallèle à l'axe principal de la parabole, ce qui déterminera également le point C sur la courbe.

On sait que la directrice RH est pour la parabole ce qu'é-

tait, par rapport à l'ellipse, le cercle décrit du second foyer F′ comme centre, avec un rayon égal à $2a$ (381).

430. Vérifications. On s'assurera :

1° Que CF = CH, quelle que soit la position du point C sur la courbe ;

2° Que la droite KP perpendiculaire sur OK contient le pied de l'ordonnée du point C ;

3° Que le triangle PCK est isocèle ;

4° Que la normale CS partage en parties égales l'angle FCF′ formé par les deux rayons vecteurs CF, CF′ ;

5° Que la sous-normale PS est toujours égale au demi-paramètre FO, etc.

431. Normales de l'hyperbole. *Première méthode*, **fig. 10.** On tracera une corde perpendiculaire sur la droite GO parallèle à la normale demandée ; le diamètre passant par le milieu de cette corde déterminera le point D, et la normale DS perpendiculaire sur la corde sera parallèle à la droite GO.

Mais, lorsque le point D est un peu éloigné du sommet de la courbe, la méthode précédente n'est pas praticable, par la trop grande obliquité de la corde et du diamètre qui la coupe en deux parties égales. C'est pourquoi cette opération n'a pas été conservée sur l'épure.

Voyons donc si les propriétés connues de l'hyperbole nous fourniront quelque moyen plus exact de résoudre la question.

432. *Deuxième méthode.* On décrira la circonférence qui a pour diamètre MN = $2a$, et le point K, suivant lequel cette circonférence coupe une droite FD′ menée par le foyer parallèlement à la normale demandée, sera le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer F sur la tangente qui correspond à cette normale.

Il est alors facile de construire cette tangente KD, puisque l'on connaît un point de cette ligne.

Mais comme c'est principalement le point de tangence que l'on veut déterminer, on fera la construction connue, ainsi :

1° Du point K, comme centre, on décrira la circonférence qui passe par le foyer F ;

2° On décrira une seconde circonférence LQ en prenant pour centre le second foyer F′, et pour rayon la droite F′L égale à MN $= 2a$;

3° On joindra le foyer F′ avec le point H suivant lequel les deux cercles se rencontrent, et la droite F′H déterminera le point D sur l'hyperbole ;

4° La droite DS parallèle à D′F sera la normale demandée.

433. Vérifications.

1° On tracera la droite DF et l'on s'assurera que le triangle DFH est isocèle ;

2° La droite KD perpendiculaire sur le milieu de FH doit contenir le point D et être tangente à l'hyperbole en ce point ;

3° La partie de cette tangente, comprise entre les asymptotes, doit être partagée au point D en deux parties égales ;

4° La normale DS perpendiculaire sur DK, et parallèle à D′F, doit partager en deux parties égales l'angle RDF, formé par l'un des rayons vecteurs DF et le prolongement DR de l'autre ;

5° Enfin, pour dernière vérification, on peut chercher l'abscisse du point D par le calcul.

434. Pour y parvenir, on sait que la tangente à l'hyperbole a pour équation $a^2yy' - b^2xx' = - a^2b^2$, que l'on peut écrire sous la forme

$$y = \frac{b^2x'}{a^2y'}x - \frac{b^2}{y'}.$$

Mais la normale devant être perpendiculaire sur la tangente, on aura, en exprimant par u l'angle connu que la normale doit faire avec l'axe des x

$$(1) \qquad \operatorname{tang} u = -\frac{a^2y'}{b^2x'}.$$

Le point x' y' étant situé sur l'hyperbole, on aura

$$(2) \qquad a^2y'^2 - b^2x'^2 = - a^2b^2.$$

Or, en éliminant y' entre les équations (1) et (2), on obtient

$$(3) \qquad x' = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2 \tang^2 u}},$$

qui fera connaître l'abscisse du point D.

Pour obtenir par le compas la valeur de x', on remplacera $b^2 \tang^2 u$ par z^2, et l'on aura $x' = \frac{a}{\sqrt{a^2 - z^2}}$; mais l'équation auxiliaire $b^2 \tang^2 u = z^2$, donne $z = b \tang u$.

Or, si l'on construit la droite mn perpendiculaire sur FH, on aura l'angle $nm\mathrm{M} = \mathrm{KFM} = \mathrm{DSP} = u$, et $m\mathrm{M}$ étant égal à b, la droite Mn vaudra

$$b \tang u = z.$$

L'arc de cercle décrit du point M comme centre avec le rayon $\mathrm{M}n = z$ déterminera le point E sur la demi-circonférence qui a pour diamètre $\mathrm{AM} = a$, et le triangle rectangle AEM donnera

$$\overline{\mathrm{AE}}^2 = \overline{\mathrm{AM}}^2 - \overline{\mathrm{ME}}^2,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\overline{\mathrm{AE}}^2 = a^2 - z^2,$$

et par conséquent

$$\mathrm{AE} = \sqrt{a^2 - z^2}.$$

On prolongera AE jusqu'à ce que l'on ait $\mathrm{AX} = a$, et la droite XP perpendiculaire sur AX donnera le point P pour le pied de l'ordonnée DP. En effet, les deux triangles AEM, AXP étant semblables, on aura

$$\mathrm{AE} : \mathrm{AX} = \mathrm{AM} : \mathrm{AP},$$

ou

$$\sqrt{a^2 - z^2} : a = a : \mathrm{AP};$$

ce qui donne

$$\mathrm{AP} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x'.$$

Toutes ces opérations peuvent être vérifiées en ramenant

AE sur AM. La droite TC perpendiculaire sur AM doit alors contenir le point X.

435. L'équation de la normale étant

$$y - y' = \text{tang}u\,(x - x'),$$

si l'on fait $y = 0$, on aura

$$x = \frac{x'\text{tang}u - y'}{\text{tang}u}\,;\ \text{mais tang}u = -\frac{a^2y'}{b^2x'}\,;$$

substituant, il viendra

$$x = \frac{-\dfrac{a^2y'x'}{b^2x'} - y'}{-\dfrac{a^2y'}{b^2x'}} = \frac{a^2y'x' + b^2x'y'}{a^2y'} = \frac{(a^2+b^2x')}{a^2} = \frac{c^2x'}{a^2},$$

et remplaçant x' par la valeur obtenue précédemment,

$x = \dfrac{c^2a^2}{a^2\sqrt{a^2-z^2}} = \dfrac{c^2}{\sqrt{a^2-z^2}}$; pour l'abscisse MS du point suivant, lequel la normale rencontre l'axe des x.

Or, on sait que AF $= c$; par conséquent si l'on décrit l'arc FC du point A comme centre, on obtiendra le point C sur TX, et la droite CS perpendiculaire sur AC déterminera le point S.

En effet, les deux triangles rectangles TAC, ACS étant semblables, on aura la proportion

$$\text{AT} : \text{AC} = \text{AC} : \text{AS},$$

ou

$$\sqrt{a^2-z^2} : c = c : \text{AS},$$

d'où

$$\text{AS} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2-z^2}} = x.$$

Ainsi les extrémités, les directions et les grandeurs de toutes les normales de l'hyperbole pourront être déterminées et vérifiées avec la plus grande exactitude.

Ce qui précède étant admis, il sera facile, en opérant comme nous l'avons dit au n° 417, de rectifier les courbes du second degré.

436. Rectification de l'ellipse. Supposons que l'on veut rectifier le quart NO de l'ellipse qui est tracée figure 4 :

1° On fera l'angle droit TOE, dont les côtés OE, OT sont parallèles aux normales extrêmes de l'arc NO ;

2° On partagera l'arc TE en autant de parties égales que l'on voudra, suivant le plus ou moins d'exactitude exigée par la question.

Dans le cas actuel, on a partagé l'arc TE en cinq parties égales ;

3° On construira les normales parallèles aux quatre rayons qui partagent l'arc TE en parties égales, ce qui revient à remplacer la courbe NO par cinq arcs de cercle de 18 *degrés* chacun ;

4° On tracera les cordes 0-1, 1-2, 2-3, etc., en joignant deux à deux les points déterminés sur la courbe par la construction des normales.

Les normales des points 1, 2, 3 et 4 pourront être obtenues en opérant comme nous l'avons dit au n° 424.

La développée ZR, tracée avec soin (411), pourra contribuer à vérifier la direction des normales ;

5° On multipliera la somme ON″ des cordes par le facteur $\frac{\pi\alpha}{360 \sin \frac{1}{2}\alpha}$, qui, dans le cas actuel, devient

$$\frac{\pi \times 18}{360 \sin 9^\circ} = \frac{\pi}{20 \sin 9^\circ} = 1{,}004,$$

et l'on aura par conséquent

$$L = 1{,}004 \times ON''.$$

437. *Pour rectifier un arc d'ellipse* BD :

1° On tracera les droites OB′, OD′ parallèles aux normales extrêmes de l'arc donné CD ;

2° On partagera l'angle B′OD′ en parties égales, suivant le nombre des arcs de cercle par lesquels on veut remplacer la courbe BD.

Dans le cas actuel, trois arcs de cercle donneront certainement une très-grande exactitude ;

3° Cela étant fait, on construira les rayons O-5′, O-6′ qui partagent l'arc B′D′ en trois parties égales, et les normales parallèles à ces rayons détermineront les points 5 et 6 de l'arc BD;

4° On fera la somme des trois cordes, et l'on multipliera cette somme B″D″ par le coefficient $\frac{\pi\alpha}{360 \sin \frac{1}{2} \alpha}$.

Or, admettons que l'angle B′OD′ mesuré avec un bon rapporteur soit égal à 44°, on aura

$$\alpha = \frac{44^\circ}{3}, \text{ et le coefficient } \frac{\pi\alpha}{360 \sin \frac{1}{2} \alpha}$$

devient
$$\frac{\pi \times 44^\circ}{3 \times 360 \sin (7^\circ\text{-}20')} = 1{,}00273,$$

de sorte que l'on aura la longueur de l'arc BD en multipliant la somme B″D″ des trois cordes par 1,00273.

438. Rectification de la parabole :

1° Les droites FB′ et FD′, **fig. 9**, étant parallèles aux normales extrêmes de l'arc BD que l'on veut rectifier, on partagera l'angle B′FD′ en trois parties égales ;

2° Les normales parallèles aux rayons F-7′ et F-8′ de l'arc B′D′ détermineront les deux points 7 et 8 qui partagent l'arc BD en trois arcs semblables.

On multipliera la somme des trois cordes par le coefficient $\frac{\pi\alpha}{360 \sin \frac{1}{2} \alpha}$.

Or, si nous supposons que, dans le cas actuel, l'angle B′FD′ soit égal à 19 -6′, on aura

$$\alpha = 6^\circ\text{-}22' ;$$

d'où

$$\frac{\pi\alpha}{360 \sin \frac{1}{2} \alpha} = \frac{\pi\,(6^\circ\text{-}22)}{360^\circ \sin (3^\circ\ 11')} = \frac{\pi \times 382}{21600 \sin (3^\circ\ 11')} = 1{,}00051.$$

439. Rectification de l'hyperbole.

Pour rectifier l'arc BD, **fig. 10** :

1° On construira, comme ci-dessus, les droites FB′, FD′ pa-

rallèles aux normales des points B et D, et l'on mesurera l'angle B'FD' avec un bon rapporteur ;

2° L'arc que l'on veut rectifier étant très-aplati, il suffira de le remplacer par deux arcs de cercle ;

3° La normale parallèle au rayon F-9', qui contient le milieu de l'arc B'D', déterminera le point 9 sur l'arc d'hyperbole BD, et, par suite, les deux arcs B-9, 9-D, que l'on peut considérer comme semblables à chacune des parties égales de B'O';

4° On tracera les cordes B-9, 9-D, et l'on fera leur somme ,

5° Cela étant fait, supposons que dans le cas actuel l'angle B'FD' soit égal à 9°44', on aura

$$\alpha = \frac{9^\circ\text{-}44'}{2} = 4^\circ 52'$$

et le coefficient

$$\frac{\pi\alpha}{360 \sin. \frac{1}{2}\alpha} = \frac{\pi\,(4^\circ\text{-}52')}{360 \sin. (2^\circ\text{-}26'} = \frac{\pi . 292}{21\,600 \sin. (2^\circ\text{-}26')} = 1{,}000301.$$

440. Remarque. Le peu de différence qui existe dans les exemples précédents, entre l'unité et le coefficient $\frac{\pi\alpha}{360 \sin. \frac{1}{2}\alpha}$ fera comprendre pourquoi, dans la pratique, on pourra presque toujours négliger la multiplication par ce facteur et se contenter, comme je l'ai dit au n° 414, de rectifier le polygone inscrit.

Admettons cependant le cas où l'on aurait besoin d'une grande exactitude, et cherchons quelles espèces d'erreurs pourront affecter le résultat obtenu par la méthode qui vient d'être exposée.

Le coefficient numérique $\frac{\pi\alpha}{360 \sin. \frac{1}{2}\alpha}$ pouvant être calculé par les logarithmes avec une grande précision, il ne peut exister d'erreur que dans la valeur de α ou dans le contour du polygone inscrit.

Or l'angle formé par les normales extrêmes sera souvent donné par la question, et, dans le cas contraire, nous avons vu comment cet angle peut être mesuré très-exactement, même avec un rapporteur médiocre.

Il ne reste donc plus qu'à rechercher quel peut être l'effet d'une erreur dans la position de l'un des points qui partagent la courbe donnée en arcs semblables.

Pour cela, supposons, **fig. 6**, que MO et ON soient deux arcs consécutifs de la courbe cherchée ; si l'on prend le point O′ au lieu de prendre le point O, la corde MO′ sera, il est vrai, un peu trop longue, mais la corde O′N sera trop courte, et l'une des erreurs détruira l'autre.

Pour reconnaître jusqu'à quel point il y aura compensation entre ces deux erreurs, concevons l'ellipse VU qui passerait par le point O et qui aurait pour foyer les points M et N.

La somme des rayons vecteurs de cette ellipse sera toujours égale à MO + ON, quel que soit le point de cette courbe que l'on aura choisi.

Or la normale du point O de l'ellipse VU partage l'angle MON formé par les rayons vecteurs en deux parties égales. Mais les deux arcs de cercle MIO, OKN, qui, dans le voisinage du point O, coïncident avec la courbe donnée, étant semblables, les triangles isocèles MHO, OGN le sont également ; les angles MOH et HON sont égaux, et la droite OH normale de la courbe à deux centres MON coïncide avec la normale au point O de l'ellipse VU ; de sorte que l'ellipse VU et la courbe MON se touchent au point O, puisqu'elles ont à ce point la même normale OG, et par conséquent la même tangente.

Or, si par un faux mouvement du compas ou de l'équerre il y a une petite erreur dans la position du point déterminé sur la courbe donnée, il est certain, et cela est certain pour toute personne familiarisée avec les opérations graphiques, que l'erreur OO′ ne s'étendra jamais jusqu'à l'endroit où les deux courbes tangentes se séparent *sensiblement* l'une de l'autre ; et le point O′ de la courbe MON pouvant toujours être considéré comme appartenant à l'ellipse VU, on aura la somme des deux cordes MO′ + O′N = MO + ON ; de sorte que le contour du polygone ou de la portion de polygone inscrit dans la courbe donnée différera extrêmement peu de ce que l'on obtiendrait si le point O était parfaitement déterminé sur cette courbe.

441. Le raisonnement qui précède suppose que les rayons de courbure des deux arcs MO et ON sont de même signe; car s'il en était autrement, **fig. 5**, et s'il existait un point d'inflexion au point O, la petite partie de courbe qui est voisine de ce point ne se confondrait plus avec un arc de l'ellipse qui aurait les points M et N pour foyer.

Pour apprécier approximativement l'erreur qui aurait lieu dans ce cas, concevons (**fig. 12**) la courbe MON composée des deux arcs semblables MO, ON, et supposons que pour mesurer les cordes, on ait placé la pointe du compas en O′ au lieu de la placer en O; laissons faire à l'arc ON une demi-révolution autour de la sécante OO′K; le point N viendra se placer en N′. Mais on pourra toujours concevoir une ellipse VOO′U, qui aurait pour foyer les points M et N′, et qui coïnciderait avec l'arc extrêmement petit OO′; de sorte que l'on aurait :

$$(1) \qquad MO + ON' = MO' + O'N'.$$

Or les triangles OKN, OKN′ étant égaux, on aura

$$(2) \qquad ON = ON';$$

les triangles égaux O′KN, O′KN′ donneront

$$(3) \qquad O'N' = O'N.$$

Ajoutant les équations (1), (2) et (3), et réduisant, on aura

$$MO + ON = MO' + O'N;$$

d'où il résulte que la petite erreur OO′ ne changera pas la somme des deux cordes.

442. Quadratures. La décomposition d'une courbe en arcs de cercle semblables entre eux pourra servir également pour résoudre le problème des quadratures.

En effet, supposons, **fig. 4**, que l'on veut calculer la surface comprise entre la courbe BD, l'ordonnée B*b* du point B, l'ordonnée D*d* du point D, et la droite *bd*. Il est évident qu'il suffira de calculer le polygone *b*B-5-6-D*b*, et d'y ajouter la somme des segments compris entre les côtés de ce polygone et les arcs de cercle par lesquels on aura remplacé la courbe donnée BD.

Or la surface du polygone pourra facilement être obtenue par la décomposition en triangles ou en trapèzes, et par conséquent il ne restera plus qu'à obtenir la surface des segments.

Les arcs de cercle B-5, 5-6, 6-D par lesquels on remplace les parties de la courbe donnée étant toujours d'un petit nombre de degrés, on pourra, comme cela se fait à chaque instant dans la pratique, considérer chacun des segments compris entre la corde et la portion de courbe correspondante comme *un segment de parabole, dont la surface est égale aux deux tiers du rectangle circonscrit.*

Or, si nous exprimons, **fig. 1**, la corde MN par c, et la flèche KI par u, la surface s du segment MKNI sera

$$(1) \qquad s = \frac{2}{3}\,\mathrm{MN} \times \mathrm{KI} = \frac{2}{3}\,cu.$$

Mais si l'on trace la corde MK, le triangle MIK rectangle en I donnera $\mathrm{KI} = \mathrm{MI} \times \mathrm{tang\,KMI}$, ou

$$2) \qquad u = \frac{c}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{4};$$

car l'angle KMI a pour mesure $\frac{\mathrm{KN}}{2} = \frac{\alpha}{4}$.

Ainsi, en portant la valeur de u dans l'équation (1), on aura

$$s = \frac{2c}{3} \times u = \frac{2c}{3} \times \frac{c}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{4} = \frac{c^2}{3}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{4}.$$

Cela étant admis, revenons à la figure **4**, désignons les cordes B-5, 5-6 et 6-D par c, c', c'' et les surfaces des segments correspondants par s, s' et s'', nous aurons :

$$s = \frac{c^2}{3}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{4}$$

$$s' = \frac{c'^2}{3}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{4}$$

$$s'' = \frac{c''^2}{3}\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{4}.$$

Et, si nous exprimons par S la somme des segments, nous aurons :

$$S = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{4}\,\alpha}{3}(c^2 + c'^2 + c''^2).$$

Le facteur polynôme $c^2 + c'^2 + c''^2$ peut facilement être réduit à un monôme par une opération graphique. En effet, on tracera :

1° La droite 6″-5‴ égale à la corde 6-5 et perpendiculaire sur D″-B″ ;

2° L'hypoténuse D″-5‴ du triangle rectangle D″-6″-5‴;

3° La droite 5‴-B‴ égale à la corde 5-B et perpendiculaire sur D″-5‴.

Le carré du nombre qui exprimera la longueur de B‴-D″ sera égal à $c^2 + c'^2 + c''^2$.

En effet, le triangle rectangle D″-6″-5‴ donne

$$(D''\text{-}5''')^2 = (D''\text{-}6''')^2 + (6''\text{-}5''')^2 \qquad \text{ou}$$

$$(1) \qquad (D''\text{-}5''')^2 = c''^2 + c'^2\,;$$

mais le triangle D″-5‴-B‴ étant rectangle en 5‴, on aura

$$(D''\text{-}B''')^2 = (D''\text{-}5''')^2 + (5'''\text{-}B''')^2 \qquad \text{ou}$$

$$(2) \qquad (D''\text{-}B''')^2 = (D''\text{-}5''')^2 + c^2\,;$$

Ajoutant les équations (1) et (2), on obtient

$$(D''B''')^2 = c''^2 + c'^2 + c^2.$$

Ainsi la formule précédente devient

$$S = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{4}\,\alpha}{3} \times (D''\ B''')^2.$$

Et si l'on ajoute cette quantité avec la surface du polygone *b*B-5-6-D*b*, on aura obtenu avec une grande exactitude la surface comprise entre l'arc BD, les ordonnées B*b*, D*d* et la droite *bd*.

443. S'il s'agissait d'une ellipse entière, il serait plus simple et plus exact d'employer la formule connue $S = \pi ab$ qui, pour la grande ellipse de la figure **4**, deviendrait $S = \pi MN \times OX$.

444. Il est évident que ce qui précède convient à toutes les courbes que l'on pourra décomposer en arcs semblables, ou, ce qui revient au même, pour lesquelles on saura calculer ou construire une normale *parallèle à une ligne donnée.*

Ainsi, la longueur d'une *courbe quelconque* sera exprimée par la formule

$$L = \frac{\pi\alpha}{360 \sin \frac{1}{4}\pi} (c + c' + c'' + \ldots),$$

et si l'on exprime la surface par S, on aura

$$S = P \times \frac{\tang \frac{1}{4}\alpha}{3} (c^2 + c'^2 + c''^2 + \ldots),$$

P étant le polygone inscrit, limité par la somme des cordes et par telles autres lignes que l'on voudra.

Il est évident que ces deux formules ne seront pas plus difficiles à employer que celles qui expriment la circonférence ou la surface du cercle ; car, pour calculer $2\alpha R$ ou πR^2, il faut bien mesurer le rayon. Eh bien ! dans le cas actuel, on mesurera la *somme des cordes*, ou l'on calculera la *somme des carrés des cordes*, ce qui ne sera pas plus difficile que de mesurer R ou de calculer R^2.

445. Si la courbe donnée A, **fig. 4**, est très-petite, on construira une courbe semblable beaucoup plus grande, dix fois par exemple ; puis on divisera la longueur obtenue par 10, ou la surface par 100.

CHAPITRE II.

Surfaces cylindriques.

446. Nous avons, dans les livres précédents, résolu les questions principales qui dépendent du plan. Nous allons étudier actuellement les propriétés des surfaces courbes.

Si l'on jette un coup d'œil sur les différents produits de l'industrie, les formes des corps terminés par des surfaces courbes paraissent variées d'un si grand nombre de manières, qu'il semble au premier abord difficile de reconnaître les propriétés particulières à chaque espèce.

Mais, en procédant avec méthode, on peut facilement déduire toutes ces propriétés d'un petit nombre de principes généraux.

447. La première et la plus essentielle des surfaces courbes que nous allons étudier est celle à laquelle on donne le nom de *cylindre*.

Il ne faut pas attacher à ce mot le même sens que dans la géométrie élémentaire ; en effet, dans cette partie des mathématiques, un cylindre, **fig. 226**, **pl. 45**, est un corps solide, engendré par un rectangle *acvu*, que l'on ferait tourner autour de ses côtés *ac*, tandis que, dans la géométrie descriptive, on donne le nom de cylindre, **fig. 224**, à la surface engendrée par une droite *ac* qui se meut parallèlement à elle-même, quelles que soient, du reste, les conditions qui déterminent le mouvement de cette droite, que l'on nomme la *génératrice* du cylindre.

448. On peut toujours supposer que la génératrice est assujettie à s'appuyer constamment sur une courbe quelconque *du*, que l'on nomme la *directrice* du cylindre.

449. Ainsi la nature du cylindre dépendra principalement de la forme de sa directrice, et l'on conçoit que si cette courbe était remplacée par une ligne droite, le cylindre deviendrait un plan; ce qui autorise à considérer le plan comme un cas particulier parmi les surfaces cylindriques.

Cette analogie entre le plan et le cylindre est une des relations qui nous seront le plus utiles. C'est pourquoi je vais tâcher de mettre en évidence les propriétés communes à ces deux surfaces.

Si nous supposons que l'on conserve comme constante la génératrice *ac* d'un cylindre, **fig. 225**, mais que l'on augmente graduellement le rayon de courbure de la directrice *du*, cette courbe deviendra successivement $d'u'$, $d''u''$; et lorsque le rayon de courbure sera infini, la directrice primitive se transformera en une droite $d'''u'''$, et la surface cylindrique en un plan pu'''.

Si l'on change le sens de courbure de la directrice, on obtiendra le cylindre $d^{\text{IV}}u^{\text{IV}}$.

Tous ces différents cylindres se touchent et sont touchés par le plan pu''' suivant la génératrice commune *ac*.

C'est pourquoi nous donnerons dès à présent au plan pu''' le nom de *plan tangent*.

450. Il semblerait résulter de ce que nous venons de dire qu'un plan tangent à un cylindre ne doit avoir qu'une droite commune avec cette surface.

Cette définition du plan tangent ne serait pas exacte pour plusieurs raisons.

D'abord, la directrice d'un cylindre pouvant avoir un grand nombre de sinuosités, un plan qui toucherait ce cylindre suivant une génératrice *ac*, **fig. 227**, pourrait encore le couper suivant d'autres droites $a'c'$.

Ensuite, la condition de n'avoir qu'une droite commune avec un cylindre pourrait tout aussi bien convenir à un plan coupant *pq*, **fig. 229**.

Il faut donc tâcher de trouver, pour le plan tangent au cylindre, une définition plus complète.

Supposons, **fig. 228**, que le cylindre A soit coupé par un plan *pq* parallèle à sa direction, la section se composera des deux génératrices *ac*, *a'c'*.

Or, si nous faisons tourner le plan *pq* autour de *a'c'*, la droite *ac* se rapprochera de *a'c'* sans cesser de lui être parallèle ; et lorsque les deux génératrices *ac*, *a'c'* seront réunies en une seule, le plan *pq* sera devenu *p'q'*, et, dans cette nouvelle position, il sera tangent au cylindre.

Nous serons donc conduits à dire qu'un plan tangent à un cylindre est celui qui contient *deux génératrices réunies en une seule*, ou, ce qui est la même chose, deux génératrices dont la distance est nulle.

451. Au lieu de faire tourner le plan *pq* autour de la génératrice *a'c'*, on aurait pu le faire mouvoir parallèlement à lui-même ou de toute autre manière, mais on serait toujours arrivé à cette conséquence que le plan deviendra tangent aussitôt que les deux lignes de section *ac*, *a'c'* seront réunies en une seule.

452. Il semblerait, au premier abord, qu'au moment où ces deux génératrices sont réunies, on doit les considérer comme n'en faisant qu'une. Il est vrai que les deux droites qui se sont ainsi rapprochées n'occupent pas plus de place qu'une seule ; mais cependant il est très-essentiel de distinguer une génératrice *simple* ou une *génératrice de section*, telle que *ac*, **fig. 229**, d'une *génératrice de tangence* que l'on pourra nommer génératrice *double*, puisque l'on peut toujours supposer qu'elle résulte du rapprochement de deux génératrices de section, et l'on devra se rappeler qu'il existe entre ces deux lignes cette différence très-grande, que la génératrice de section ne suffit pas pour déterminer la direction du plan coupant, qui, tournant autour de cette droite, peut prendre une infinité de positions différentes, **fig. 229**, tandis que la position du plan tangent *p'q'*, **fig. 228**, sera déterminée par la génératrice de tangence *a'c'*, puisqu'il ne

pourrait pas tourner autour de cette ligne sans devenir un plan coupant, ce qui dédoublerait aussitôt la génératrice de tangence et la décomposerait en deux génératrices de section $a'c'$, $a''c''$, qui s'écarteraient l'une de l'autre à mesure que le plan se rapprocherait de la position pq.

453. On peut encore être conduit aux conséquences précédentes en supposant que le cylindre soit coupé par un plan quelconque pq, **fig. 230**, que l'on ferait ensuite tourner autour d'une droite mn tangente à la courbe de section ac, cette courbe deviendrait alors successivement ac', $c''ac''$, en s'allongeant toujours à mesure que le plan se rapprocherait de la direction du cylindre, et lorsqu'il aurait atteint cette direction, les deux branches de la courbe seraient réunies en une seule et formeraient alors la génératrice de tangence ac'''.

Enfin, on peut encore supposer que le cylindre est un prisme dont le nombre des faces serait infini.

Dans cette dernière hypothèse, **fig. 231**, le plan tangent sera le prolongement de l'une des faces du prisme, et la largeur de cette face devant être considérée comme nulle, les deux arêtes cc, $c'c'$ infiniment rapprochées formeront la génératrice de tangence.

454. Concevons, **fig. 232**, une courbe quelconque $aa'm$ située sur le cylindre A, et joignons par une sécante les deux points a et a', suivant lesquels cette courbe serait coupée par un plan quelconque pq parallèle au cylindre. Si nous faisions tourner le plan pq pour le ramener dans la position $p'q'$, le point a se rapprochera du point a', et lorsque le plan $p'q'$ sera tangent, les deux points a et a' seront réunis ; la droite aa' aura pris la position mn et sera située dans le plan tangent $p'q'$.

Ainsi, le plan tangent $p'q'$ contiendra la droite mn tangente au point a' à une courbe *quelconque* située sur la surface du cylindre ; de sorte que la construction du plan tangent se réduit à faire passer un plan par les deux droites $c'c'$, mn.

La courbe $aa'm$ pouvant être prise arbitrairement, il en

résulte que *le plan tangent au cylindre contient toutes les droites qui toucheraient la surface en un point quelconque de la ligne* c'c'.

455. Cylindre projetant. Courbes à double courbure. La première application que nous ferons des surfaces cylindriques aura pour but de déterminer les projections des lignes courbes.

Soit ABCD, **fig. 233, pl. 46**, une courbe quelconque située dans l'espace. Si de chaque point de cette ligne on abaisse une perpendiculaire sur le plan de projection P, la courbe *abcd*, qui contient les pieds de toutes ces perpendiculaires, sera la projection de la courbe.

La surface qui contient toutes les perpendiculaires, A*a*, B*b*, C*c*, etc., se nomme *cylindre projetant*. La ligne *abcd*, trace du cylindre projetant, est la projection de la courbe ABCD.

Une seule projection ne suffit pas pour déterminer une courbe dans l'espace, car il est évident que la ligne *abcd* serait la projection commune à toutes les lignes courbes tracées sur la même surface projetante.

456. Il résulte de ce que nous venons de dire, que pour déterminer la grandeur et la position d'une ligne courbe dans l'espace, il faut la projeter sur deux plans, car alors chacun de ses points étant déterminé de position, la courbe elle-même sera déterminée.

457. La *projection verticale* d'une courbe est la ligne qui passe par les pieds de toutes les perpendiculaires abaissées des différents points de cette courbe sur le plan vertical, et la projection horizontale est la ligne qui contient les pieds de toutes les perpendiculaires abaissées sur le plan horizontal.

458. Soit, **fig. 324**, *a'b'c'd'e'f'g'h'i'k'* la projection verticale d'une courbe quelconque, et *abcdefghik* sa projection horizontale, il est évident que la courbe sera déterminée dans l'espace, car devant être en même temps sur les deux

cylindres projetants dont les lignes données sont les traces, elle sera l'intersection de ces deux surfaces et participera de la courbure de chacune d'elles.

C'est pour cette dernière raison que l'on donne à ces courbes en général le nom de *courbes à double courbure*.

459. Si l'on partage la projection verticale *a'b'c'd'*..... en un assez grand nombre de parties pour que l'on puisse sans erreur sensible considérer chacune d'elles comme une ligne droite ; si on porte tous ces petits arcs à la suite les uns des autres, comme on le voit, **fig. 235**, la ligne *a'b'c'*..... *k'a'*, que l'on obtiendra, sera la rectification de la projection verticale de la courbe.

Supposons actuellement que par chacun des points *a'*, *b'*, *c'*, on élève sur la droite que l'on vient d'obtenir une perpendiculaire égale à la distance du point correspondant de la courbe donnée au plan vertical de projection, et que par les extrémités A, B, C,..... K, A, de ces perpendiculaires on fasse passer une courbe, on aura le développement de la surface projetante perpendiculaire au plan vertical.

La courbe ABCD.....KA représente ce que devient la courbe donnée dans le développement du cylindre projetant perpendiculaire au plan vertical.

On aurait pu de la même manière développer le cylindre perpendiculaire au plan horizontal.

460. Prenant les arcs AK, KI, IH, etc., et portant leur longueur en ligne droite et à la suite les uns des autres, **fig. 236**, on obtiendra la courbe donnée dans sa véritable longueur. C'est ce qu'on appelle *rectifier une courbe à double courbure*.

461. Si l'on voulait obtenir les projections des points qui, à partir du point A, partageraient la courbe donnée en trois parties égales, on partagerait la ligne droite AA ; ce qui donnerait deux points N, N, que l'on reporterait d'abord dans le développement, **fig. 235**, d'où l'on déduirait facilement les points *m'*, *n'*, qui, reportés eux-mêmes sur la projection

verticale de la courbe, donneraient les projections horizontales m, n.

On emploierait le même moyen pour partager une courbe quelconque en tout autre nombre de parties égales ou ayant entre elles des rapports donnés.

462. On nomme *trace d'une courbe* les points où cette courbe perce les plans de projection.

Soit (a, a'), **fig. 237**, une courbe donnée. Le point (h, h') ayant sa projection verticale sur la ligne AZ, appartient au plan horizontal, et représente la trace horizontale de la courbe. Le point (v, v'), dont la projection horizontale est sur la ligne AZ, sera la trace verticale.

Il est facile de reconnaître que (c, c') est le point où la courbe perce le plan horizontal p, et (d, d') celui où elle perce le plan vertical p'.

463. *Trouver l'intersection d'une courbe* (a, a') *avec un plan quelconque.*

Concevons par cette courbe le cylindre projetant perpendiculaire au plan horizontal, et cherchons la ligne (b, b) qui provient de l'intersection de cette surface par le plan donné p''. Le point (m, m'), où les lignes a' et b' se rencontrent, est le point demandé.

Pour obtenir la ligne b', il suffit de construire les points où le plan p'' est percé par chacune des verticales q, q', q'', génératrices du cylindre vertical qui a pour directrice la courbe a.

On aurait pu tout aussi bien faire usage du cylindre projetant perpendiculaire au plan vertical.

La seule différence qu'il y ait entre ce problème et celui de l'intersection d'une droite avec un plan que nous avons résolu (87), c'est qu'alors la surface projetante de la ligne donnée était un plan perpendiculaire au plan de projection.

464. *Construire une tangente à une courbe quelconque.*

Nous avons dit (310) qu'une tangente à une courbe quelconque devait être considérée comme le prolongement d'un

arc infiniment petit de cette courbe ; on conçoit, en effet, qu'une ligne droite qui n'aurait qu'un point de commun avec une courbe ne serait pas pour cela une tangente à cette courbe. Ainsi, une ligne droite oblique ou perpendiculaire au plan d'un cercle et qui passerait par un point de sa circonférence n'aurait qu'un point de commun avec ce cercle, et cependant ce ne serait pas une tangente, parce qu'elle ne serait pas dans le plan de la courbe.

Une ligne qui n'aurait qu'un point de commun avec une courbe à double courbure quelconque ne serait pas non plus une tangente à cette courbe ; il faut encore, pour que l'on puisse la considérer comme telle, qu'elle soit située dans le plan osculateur (314) qui contient l'arc infiniment petit dont elle est en quelque sorte le prolongement.

Nous avons dit (454) que le plan tangent à un cylindre contient les tangentes à toutes les courbes qui passent par le point de tangence sur la surface du cylindre.

De là résulte le moyen de construire une tangente à une courbe à double courbure.

Soient (a, a'), **fig. 238**, les deux projections de cette courbe, le point de tangence (m, m') étant donné.

Concevons par le point m' une tangente à la projection verticale de la courbe, on pourra considérer cette tangente comme la trace d'un plan p perpendiculaire au plan vertical et tangent au cylindre projetant horizontal. Or, d'après ce que nous venons de dire, ce plan doit contenir la tangente à la courbe ; de plus, cette tangente doit être située dans le plan p', tangent à la surface projetante perpendiculaire au plan horizontal. Donc la tangente cherchée devant faire partie des deux plans p et p', sera leur intersection, d'où l'on voit que

465. *Pour construire une tangente en un point donné d'une courbe quelconque, il suffit de construire par les projections du point donné, deux tangentes aux projections de la courbe. Ces lignes seront les projections de la tangente à la courbe.*

466. *Construction de la normale.* Je dirai de la normale

ce que je viens de dire de la tangente. Toute ligne droite passant par le point de tangence et perpendiculaire à la tangente n'est pas nécessairement une normale. Il faut encore pour cela qu'elle soit dans le plan de la courbe, si cette courbe est plane, ou dans le plan osculateur, s'il s'agit d'une courbe à double courbure. Donc, si l'on veut obtenir la normale au point (m, m') de la courbe à double courbure (a, a'), **fig. 238**, on choisira deux autres points (n, n') (u, u') sur la courbe et à peu de distance du point donné (m, m'); puis après avoir construit les trois tangentes $(vu, v'u')$, $(sm, s'm')$, $(on, o'n')$, on déterminera les points v, s, o, où ces tangentes percent le plan horizontal, et l'on fera passer une courbe par ces points. Or, il est évident que si les trois points (uu'), (mm'), (nn'), étaient infiniment près l'un de l'autre, les trois tangentes pourraient être considérées comme dans un même plan qui serait le plan osculateur, et la ligne vso serait droite et se confondrait avec sa tangente sz. Donc, en construisant cette tangente, on pourra la regarder comme la trace du plan osculateur en (mm').

Faisant tourner ce plan autour de sa trace sz pour le rabattre sur le plan horizontal de projection, le point de tangence (mm') viendra se placer en m''. La tangente sera représentée dans le rabattement par sm''. On lui mènera la perpendiculaire $m''z$ qui sera la normale rabattue sur le plan horizontal. En faisant revenir le plan osculateur à sa place, le point (zz') ne bougera pas, et les deux projections de la normale seront $(zm, z'm')$.

467. *Courbes planes inclinées par rapport aux plans de projection.* Dans tout ce que nous venons de dire sur la projection des courbes, nous avons supposé, pour plus de généralité, qu'il s'agissait d'une courbe à double courbure ; mais si la courbe était plane, et qu'on le sût d'avance, on pourrait souvent rendre les constructions plus simples en prenant, **fig. 239**, l'un des plans de projection perpendiculaire au plan de la courbe. Au moyen de cette précaution, l'une des projections de la courbe se confond avec la trace du plan qui la contient, et qui, dans ce cas, devient l'une des surfaces projetantes. Ainsi, le plan de la courbe $(abc, a'b'c')$ étant perpen-

diculaire au plan horizontal, sa projection sur ce plan sera la droite *ac*.

Si l'on voulait avoir la courbe dans sa véritable grandeur, on ferait tourner le plan qui la contient autour de sa trace verticale, et l'on obtiendrait $a''b''c''$. Les droites (db, db'') sont la projection verticale et le rabattement d'une tangente dont la projection horizontale se confondrait avec celle de la courbe.

468. *Les deux projections d'une courbe étant données, reconnaître si cette courbe est plane.*

Il est évident que toute courbe qui se projette en ligne droite est nécessairement une courbe plane.

Prenant sur la courbe, **fig. 240,** deux points (aa', oo') situés, pour plus de simplicité, sur une même droite horizontale, et construisant le plan vertical p perpendiculaire sur cette horizontale, on cherchera la projection de la courbe sur ce plan ; si cette projection est une ligne droite, on pourra en conclure que la courbe est plane ; car il est évident que toute courbe qui se projette par une ligne droite est nécessairement située dans le plan projetant dont cette ligne est la trace.

Il est bien entendu que cette manière de reconnaître si une courbe est plane n'est pas rigoureusement exacte, et qu'elle ne doit être employée que dans le cas où l'on serait privé de moyens plus rigoureux résultant de la définition géométrique de la courbe donnée.

Je terminerai ce sujet par l'étude des propriétés de l'une des courbes les plus utiles que l'on puisse tracer sur un cylindre.

469. Hélices. Lorsqu'une courbe coupe toutes les génératrices d'un cylindre suivant le même angle, on lui donne le nom d'*hélice*.

On peut dire encore que l'hélice est engendrée par un point qui s'éloigne à chaque instant d'un plan perpendiculaire au cylindre d'une quantité proportionnelle à l'arc parcouru par sa projection sur ce plan.

Ainsi, par exemple, si nous supposons que le cylindre A,

fig. 241, pl. 47, soit perpendiculaire au plan horizontal, l'hélice *a'um* serait engendrée par le point *aa'* qui s'élèverait à chaque instant d'une quantité proportionnelle à l'arc de cercle parcouru par la projection horizontale *a*.

470. La distance *a'a''* entre deux intersections successives de la courbe avec la même génératrice se nomme le *pas de l'hélice*, et la portion de courbe correspondante à une révolution entière se nomme une *spire*.

471. La section *droite* du cylindre est une hélice dont le pas est égal à zéro.

472. Les hélices se distinguent par la nature de la section droite du cylindre sur lequel elles sont tracées. Lorsque cette section est un cercle, on dit que l'hélice est *à base circulaire*.

473. *Construction de l'hélice*. Supposons que la circonférence *a*-4-14 soit la base ou projection horizontale d'une hélice dont le pas serait *a'a''* ; on partagera cette droite et la circonférence *a*-4-14 en un même nombre de parties égales, en 16 par exemple ; on tracera ensuite une horizontale par chacun des points de division de la verticale *a'a''*.

Si l'on suppose actuellement que le point générateur, partant de *aa'*, tourne dans le sens de l'arc 1-2-3, etc., il est évident que lorsqu'il sera parvenu sur la verticale du point **1**, il sera élevé, au-dessus du plan horizontal, d'une quantité égale à la seizième partie du pas, et sa projection verticale devra, par conséquent, se trouver sur la première horizontale au-dessus de la ligne AZ.

Lorsque le point générateur sera parvenu sur la verticale du point 2, sa projection verticale sera élevée de 2 seizièmes du pas, et sera sur la deuxième horizontale, etc.

De sorte que tous les points de la projection verticale de la courbe seront déterminés par les intersections des verticales élevées par les 16 points de division de la circonférence *a*-4-14 avec les horizontales passant par les 16 points de division de la verticale *a'a''*.

474. Il résulte de la définition que nous avons donnée au n° 469 que, dans le développement du cylindre qui contient l'hélice, *cette courbe se transforme toujours en une ligne droite.*

La figure **242** est le développement de la moitié du cylindre A.

475. On peut se servir avec avantage de ce développement pour construire la projection de la courbe. En effet, si le pas de l'hélice était peu considérable, il serait difficile de partager avec beaucoup d'exactitude la verticale $a'a''$. Dans ce cas, on commencerait par construire l'oblique $a^{IV}c'$ que l'on partagerait en 8 parties égales, et les points de division de l'hélice seraient alors déterminés par les intersections des verticales élevées par les points de division de la circonférence a-4-14 avec les horizontales passant par les points de l'oblique $a^{IV}c'$.

476. Lorsqu'on prend ainsi une oblique pour échelle de hauteur, il n'est pas nécessaire que la droite $a^{IV}a^{V}$ soit égale au développement de la circonférence a-4-14. Il suffit que la verticale $a^{V}c'$ soit égale à la hauteur de la partie de l'hélice que l'on veut projeter. De sorte que si nous avions fait $a^{IV}a^{VI}$ égal à $a'a''$, les seize parties égales de l'oblique $a^{V}a^{VI}$ auraient déterminé les hauteurs des seize points correspondants de la première spire.

477. Lorsqu'une hélice se compose d'un très-grand nombre de spires, on peut construire avec beaucoup de soin, **fig. 246**, la projection de l'une de ces courbes sur une carte que l'on découpera, et qui, étant reportée à toutes les hauteurs, servira pour guider le crayon.

On pourra se contenter de la moitié d'une spire, parce que le même profil étant retourné servira pour construire les parties vues et celles qui sont cachées.

Enfin, lorsque l'on veut tracer un arc d'hélice sur un cylindre, il suffit de déterminer, **fig. 247**, deux points m et n de la courbe demandée ; après quoi il sera facile de la tracer

avec une règle flexible à laquelle on fera prendre la courbure du cylindre.

Quoique deux points suffisent, dans ce cas, pour déterminer la courbe, on fera bien cependant de tracer sur le cylindre un ou deux points intermédiaires pour servir comme vérification.

478. Il arrivera souvent par la suite que l'on ait à tracer sur un même cylindre, **fig. 241**, plusieurs hélices de même pas, mais situées à des hauteurs différentes. Dans ce cas, il ne sera pas nécessaire d'établir sur la projection du cylindre de nouvelles horizontales, ce qui ferait confusion. Il sera préférable de porter avec le compas, sur la verticale projetante de chaque point, la différence de hauteur entre la première hélice et celle que l'on veut obtenir.

479. Si l'on veut construire plusieurs hélices de même pas et à la même hauteur sur des cylindres concentriques, **fig. 243**, on relèvera les points sur les horizontales correspondantes.

480. Tangentes à l'hélice. On sait que, dans le voisinage du point de tangence, une courbe se confond toujours avec sa tangente. De plus, l'hélice devant se développer en ligne droite, elle devra, dans le développement du cylindre, continuer à se confondre avec sa tangente.

D'où il résulte que la tangente coïncidant avec la courbe développée doit être l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont la hauteur est à la base comme le pas de l'hélice est au développement de la circonférence du cercle qui en forme la projection, ou, ce qui est la même chose, comme un certain nombre de parties égales du pas est à un pareil nombre de parties égales de la circonférence de la base.

481. Supposons donc que l'on veuille construire une tangente au point 14′ de l'hélice $a'a'''$, **fig. 241**, on construira d'abord la tangente 14-m.

Cette droite sera la trace horizontale du plan tangent au cylindre qui contient l'hélice, de sorte que si on fait 14-m

égal à $\frac{3}{16}$ de la circonférence, et que 14′-*u* soit égal à $\frac{3}{16}$ du pas de l'hélice, la verticale *mm′* déterminera le point *m′*, et l'hypoténuse 14′-*m′* sera la projection verticale de la tangente au point 14′.

Sur la figure **245**, *a′m′* est la tangente au point *aa′* ; *a′u* est égal à $\frac{3}{8}$ du pas, et l'horizontale *um* vaut $\frac{3}{8}$ de la circonférence de la base.

482. Il résulte de ce qui précède qu'il n'est pas nécessaire que la courbe soit tracée, pour que l'on puisse construire sa tangente.

483. Si l'on prévoit le cas où il serait nécessaire de construire un grand nombre de tangentes à une même hélice, on pourra construire, **fig. 244**, la courbe *a*-9-12′, qui est la développante de la circonférence du cercle *a*-10-*c″* (323). Cette courbe contiendra les traces horizontales de toutes les tangentes à l'hélice.

De sorte que, pour construire l'une quelconque de ces tangentes, celle, par exemple, qui toucherait l'hélice au point 10‴,

On tracera :

1° La droite 10-10′, perpendiculaire au rayon *c*-10, et qui sera par conséquent la projection horizontale de la tangente demandée ;

2° La verticale 10′-10″, qui déterminera le point 10″ sur la ligne AZ ;

3° La droite 10″-10‴, qui touchera l'hélice au point 10‴.

484. La même courbe pourra servir à construire les tangentes à toute autre hélice du même pas, et qui serait située sur un cylindre d'un rayon plus petit ou plus grand.

Ainsi, par exemple, pour construire la tangente au point 13‴,

On tracera :

1° La tangente 13-13′ parallèle à 10-10′ ;

2° La droite *c*-10′ qui déterminera le point 13′ ;

3° La verticale 13-13″ ;

4° Enfin, la tangente demandée 13″-13‴.

En effet, les deux tangentes 10-10′, 13-13′ sont entre elles comme les rayons c-10, c-13. Or, la droite 10-10′ étant le développement de l'arc ac''-10, il s'ensuit que 13-13′ sera le développement de l'arc $a'c'$-13 : ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit au n° 480.

On remarquera encore que l'on peut avoir

$$0'''\text{-}13''' : 0'''\text{-}10''' = c\text{-}13 : c\text{-}10 = c\text{-}13' : c\text{-}10' = a''\text{-}13'' : a''\text{-}10''.$$

Or, si on ne prend que les rapports extrêmes, on aura

$$0'''\text{-}13''' : 0'''\text{-}10''' = 0''\text{-}13'' : 0''\text{-}10''.$$

Donc les horizontales 0″-10″, 0‴-10‴ étant coupées en parties proportionnelles par les deux tangentes 10″-10‴, 13″-13‴. Ces lignes doivent se rencontrer sur le prolongement de l'axe commun aux deux cylindres.

485. Projection du cylindre oblique. Dans les articles précédents, nous avons considéré les cylindres comme surfaces projetantes, nous allons actuellement étudier ces sortes de surfaces sous un point de vue plus général.

Une surface cylindrique est déterminée lorsque l'on connaît les projections de la directrice et celles d'une génératrice ou d'une droite quelconque qui lui serait parallèle.

Supposons, par exemple, que les deux courbes 1-3-5-7, **fig. 248, pl. 48**, soient les deux projections de la directrice d'une surface cylindrique. On prendra sur cette ligne un certain nombre de points, et les droites menées par ces points, parallèlement à la direction donnée ac, $a'c'$, seront les génératrices de la surface proposée.

Dans les questions composées, il est souvent nécessaire de construire un grand nombre de génératrices, et, dans ce cas, pour plus d'ordre dans le travail, on les distingue par des numéros.

Il ne faut pas cependant construire de suite et sans nécessité un trop grand nombre de génératrices. Il n'est pas nécessaire, par exemple, que ces lignes soient aussi plus rapprochées les unes des autres dans les parties où la surface a peu de courbure ; mais on fera bien de tracer au moins au crayon celles qui correspondent aux points les plus essentiels de la surface.

Ainsi, dans l'exemple qui nous occupe, on devra s'attacher surtout à déterminer avec exactitude :

1° Les génératrices qui passent par les points 1 et 7, et qui forment les limites de la surface cylindrique ;

2° La génératrice du point 5 suivant laquelle la surface du cylindre est touchée par un plan vertical. Cette génératrice forme la limite de la projection horizontale du cylindre ;

3° La génératrice du point 2, suivant laquelle la surface serait touchée par un plan perpendiculaire au plan vertical de projection. Cette génératrice forme la limite de la projection verticale du cylindre ;

4° On devra chercher aussi à donner toute l'exactitude possible aux projections du point 3, suivant lequel la directrice du cylindre est touchée par un plan perpendiculaire à la ligne AZ.

486. On pourra simplifier le travail en choisissant de préférence les génératrices qui auraient une projection commune.

Ainsi, par exemple, la projection verticale de la génératrice qui contient le point 1 servira en même temps pour celle qui contient le point 4, etc.

487. Parties vues et cachées sur les surfaces cylindriques. La nature particulière des surfaces cylindriques que l'on emploie dans l'industrie permettra presque toujours de reconnaître au premier coup d'œil quelles sont les parties de ces surfaces qui doivent être vues et celles qui sont cachées ; mais, lorsqu'il y aura incertitude, on pourra opérer de la manière suivante :

Supposons que la surface donnée soit coupée par un plan *pq* parallèle au cylindre, et perpendiculaire au plan vertical de projection. On obtiendra pour sections les deux génératrices des points 1 et 4, et la deuxième de ces droites étant plus près du plan vertical que la première, elle sera derrière la partie de la surface qui contient la génératrice du point 1.

Il suffira souvent d'une ou deux opérations de cette espèce pour reconnaître toutes les parties vues et cachées.

Nous avons supposé ici que l'on a supprimé toute la partie de la surface qui est au-dessus de la directrice, et que l'on n'a conservé que ce qui est compris entre cette courbe et le plan horizontal de projection.

Il résultera de là que toutes les génératrices qui s'appuient sur l'arc 7-5 seront vues sur la projection horizontale depuis cet arc jusqu'à l'arc 5-1, à partir duquel elles passent au-dessous de la surface.

Les génératrices qui s'appuient sur l'arc 5-1 seront vues entièrement sur la projection horizontale.

Des considérations du même genre feront reconnaître les parties vues et cachées de la projection verticale.

Ainsi, sur cette projection, les génératrices qui s'appuient sur l'arc 1-2 seront vues entièrement, tandis que celles qui s'appuient sur la courbe 2-4 seront cachées. Enfin, les génératrices qui s'appuient sur l'arc 4-7 seront vues.

On reconnaît pourquoi il est essentiel, comme nous l'avons dit plus haut, de déterminer avec le plus de précision possible les génératrices des points 2, 5, 7 et 1, puisque ces lignes forment les limites des parties vues et cachées sur la projection du cylindre.

La construction exacte de ces points dépend des principes qui ont été exposés aux nos 343, 344.

488. Quoique nous ayons supposé la surface terminée dans sa partie supérieure par la courbe 1-5-7, qui lui sert de directrice, il vaudra mieux, en général, admettre que les génératrices d'un cylindre sont infinies, de sorte que toute surface cylindrique sera elle-même infinie, et les parties de ces surfaces terminées par des lignes, ou composant la limite des corps, ne seront considérées que comme des portions de cylindre.

Si la directrice est une courbe infinie, le cylindre sera infini suivant ses deux dimensions ; mais si la directrice était une courbe fermée ou terminée par deux points, le cylindre ne serait infini que dans la direction de ses génératrices.

489. Traces du cylindre. Toute surface cylindrique

étant infinie doit, en général, se prolonger au delà des plans de projection.

Or, si après avoir construit un assez grand nombre de génératrices, on détermine les traces de chacune de ces lignes, les courbes passant par tous ces points seront les traces du cylindre. Ainsi :

La courbe 1′-5′-7′ est la trace horizontale et la courbe 1″-5″-7″ est la trace verticale du cylindre donné.

490. Nous avons supposé (485), pour plus de généralité, que la directrice du cylindre était une courbe quelconque ; mais, dans les applications, on prend presque toujours pour directrice une courbe parallèle à l'un des plans de projection.

Ces sortes de courbes sont égales et parallèles aux traces, et se construisent de la même manière. Ainsi, par exemple, pour obtenir la courbe 1‴-5‴-7‴, il suffira de projeter tous les points suivant lesquels le plan horizontal *mn* coupe les génératrices du cylindre.

491. En prenant pour directrice la trace du cylindre ou une courbe parallèle à cette trace, on n'ôte rien de la généralité des principes que nous allons exposer.

Il est facile de concevoir, en effet, que la surface du cylindre sera toujours la même tant que la courbe employée comme directrice sera située tout entière dans cette surface et qu'elle sera coupée par toutes les génératrices. Or, les traces jouissent essentiellement de cette propriété.

Ainsi, quelle que soit la nature d'un cylindre donné, on pourra toujours construire l'une de ses traces ou une section parallèle à cette trace et remplacer la directrice primitive par la section obtenue.

492. Le plan qui toucherait le cylindre suivant la génératrice du point 6, aurait pour trace horizontale la droite *p*′-6′ tangente à la trace horizontale du cylindre, et la trace verticale *p*′-6″ de ce même plan devra être la tangente à la courbe 1″-6″-7″, qui est la trace verticale du cylindre.

Les droites *v*′-2″, *v*′-2′ sont les traces d'un second plan qui toucherait le cylindre suivant la génératrice du point 2,

et qui serait perpendiculaire au plan vertical de projection.

Ces deux plans tangents se coupent suivant une ligne *vs*, *v's'*, qui doit être parallèle au cylindre donné.

Enfin, les deux droites *v'''*-6''', *v'''*-2''', tangentes à la courbe 1'''-5'''-7''', proviennent de l'intersection des deux plans tangents par le plan horizontal *mn*.

493. La figure **250** contient les deux projections d'un cylindre dont la directrice est une courbe fermée située dans le plan horizontal.

494. Il sera surtout essentiel de déterminer avec beaucoup de soin les points 1, 2, 3, 4.

Les points 2 et 4 appartiennent aux deux génératrices qui forment les limites de la projection horizontale du cylindre, et les points 1 et 3 sont les pieds des génératrices qui forment les limites de la projection verticale.

Si la directrice est une ellipse, ce qui arrive souvent dans les applications, les points 1, 2, 3, 4 seront déterminés par le principe du n° 372.

On doit encore remarquer que, sur la projection horizontale, la partie de surface cylindrique qui a pour directrice l'arc 2-3-4 sera vue, tandis que celle qui a pour directrice l'arc 4-1-2 doit être cachée.

Sur la projection verticale, la partie vue est celle qui a pour directrice la courbe 1-2-3, et par conséquent la partie qui a pour directrice l'arc 3-4-1 est cachée.

495. Plusieurs simplifications remarquables peuvent résulter de la position du cylindre par rapport aux plans de projection.

Ainsi, **fig. 251**, lorsque l'un de ces plans sera parallèle au cylindre, il en résultera cet avantage, que les génératrices seront projetées sur ce plan suivant leurs véritables grandeurs.

496. Si l'un des plans de projection était perpendiculaire au cylindre, **fig. 252**, chaque génératrice se projetterait sur ce plan par un seul point, et la projection du cylindre

se réduirait à sa trace, qui serait en même temps la directrice.

Pour exprimer qu'un point est situé sur la surface du cylindre, on construira la génératrice passant par ce point. Il peut y avoir plusieurs solutions. Ainsi, par exemple, le point m, **fig. 250, 251**, sera la projection horizontale commune à deux points qui auront m' et m'' pour leurs projections verticales.

Dans la figure **249**, les points mm', mm'', mm''', mm^{IV} appartiennent tous les quatre à la surface d'un cylindre qui aurait pour directrice la courbe ac.

497. Section droite et développement du cylindre. Si l'on coupe un cylindre par un plan parallèle à ses génératrices, on obtient pour section une ligne droite. C'est la manière la plus simple de couper un cylindre. Toute autre section par un plan sera une courbe plane dont la forme dépendra de la nature de la courbe qui aura servi de directrice au cylindre, et de l'inclinaison suivant laquelle il a été coupé ; mais, parmi les sections par un plan, il faut distinguer surtout celle que l'on obtient en coupant le cylindre perpendiculairement aux génératrices. Cette courbe, que nous nommerons la *section droite du cylindre*, nous servira dans un grand nombre d'applications.

498. Supposons, par exemple, que l'on veuille développer la surface d'un cylindre, **fig. 253, pl. 49.**

On projettera le cylindre proposé sur un plan parallèle à ses génératrices, afin d'avoir toutes ces lignes projetées dans leur véritable longueur ; menant ensuite par un point quelconque a un plan perpendiculaire à ces génératrices, la ligne ac sera la projection verticale de la section droite (497). Il serait facile de construire la projection horizontale de cette courbe en abaissant des perpendiculaires de tous les points où le plan ac est rencontré par les génératrices du cylindre ; mais cette seconde projection serait inutile pour le but que nous nous proposons ici. Ce qui est essentiel, c'est d'obtenir la section ac dans sa véritable grandeur ; pour y parvenir, on la fera tourner jusqu'à ce qu'elle soit rabattue sur le plan de

projection ; ce qui donnera la courbe M pour la véritable grandeur de la *section droite* du cylindre.

Pour construire cette courbe, il faut déterminer un certain nombre de points assez rapprochés, pour que l'on puisse, sans erreur sensible, considérer comme une ligne droite chacun des arcs compris entre deux points consécutifs, et plaçant tous ces petits arcs, à la suite les uns des autres, sur la ligne droite $c'a'c'$, on élèvera par chacun des points de division de cette ligne, une perpendiculaire égale à la génératrice correspondante de la surface cylindrique que l'on se proposera de développer ; puis faisant passer des courbes par les extrémités de ces perpendiculaires, on aura construit le développement de la surface du cylindre.

499. Pour plus d'ordre, on fera bien de numéroter les génératrices sur les deux projections, ainsi que dans le développement de la surface et sur la courbe M qui représente la section rabattue.

500. Pour obtenir sur le développement la position d'un point déterminé mm', on construira la génératrice correspondante sur les deux projections, d'où il sera facile de déterminer sa position sur le développement du cylindre.

501. Si l'on voulait savoir ce que devient dans le développement une courbe quelconque tracée sur la surface du cylindre, on construirait cette courbe sur les deux projections, d'où, par des parallèles à la droite $c'a'c'$, il serait facile de ramener chacun de ses points sur la génératrice correspondante du développement.

502. Le lecteur a sans doute compris que si l'on a primitivement projeté le cylindre donné sur un plan parallèle à sa direction, c'est afin d'éviter la construction nécessaire pour obtenir la véritable longueur de chaque génératrice.

Il peut cependant exister quelques cas, très-rares, il est vrai, où l'on serait forcé de placer un cylindre dans une position inclinée, **fig. 255, 256.** Si l'on voulait alors construire le développement, il faudrait opérer de la manière suivante :

On projetterait, **fig. 257**, le cylindre donné sur un plan auxiliaire A'Z' parallèle à sa direction (285), et cette nouvelle projection remplaçant la projection verticale primitive, on agirait exactement pour le reste comme nous l'avons dit dans l'exemple précédent.

503. Si un point était donné par sa projection verticale m et qu'on voulût déterminer la position de ce point dans le développement du cylindre, on commencerait par construire la projection horizontale m' de ce point, d'où on déduirait la projection m'' sur le plan auxiliaire ; puis après s'être assuré que les deux projections m et m'' sont à la hauteur, on ramènerait ce point sur la génératrice correspondante du développement par une parallèle à la droite $c'a'c'$.

504. Les constructions que nous venons d'indiquer consistent à regarder le cylindre comme un prisme dont la surface se composerait d'un très-grand nombre de faces, hypothèse qui n'est pas tout à fait exacte, mais qui suffit pour la plus grande partie des applications à l'industrie (413).

D'ailleurs, lorsque la courbure d'un arc sera très-sensible, on pourra prendre sur cet arc des points plus rapprochés, et, par cette précaution, on parviendra toujours à développer la section droite, de manière à rendre les erreurs tout à fait insensibles.

505. Si la section droite était un cercle, on pourrait mesurer le rayon avec beaucoup de soin, et prendre une longueur égale à $2\pi R$ pour le développement de la circonférence ; après quoi on établirait sur cette ligne développée les points où elle doit être coupée par les génératrices du cylindre.

506. Si la nature des applications dont on s'occupe exigeait que l'on développât un grand nombre de cylindres circulaires, on pourrait conserver dans son portefeuille ou sur une planche à dessin un triangle cab, dans lequel les deux côtés ac, ab seraient entre eux comme 1 : 3,14 ou plus exactement encore comme 1 : 3,1416.

Pour développer un cylindre qui aurait pour base la circonférence N, **fig. 258**, on fera, sur la figure **254**, ac' égal à $a''c''$; puis on tracera $c'b'$ parallèle à cb, ce qui donnera ab' pour la longueur de la circonférence N.

Si ensuite on fait as égal à la hauteur du cylindre donné, le rectangle $sab'h$ sera le développement, sur lequel on pourra ensuite tracer les génératrices à des distances égales ou inégales, suivant la nature de la question.

507. Plan parallèle au cylindre. La combinaison la plus simple du cylindre et du plan a lieu lorsque ces deux surfaces sont parallèles. Pour satisfaire à cette condition, il suffit de faire passer le plan par une droite quelconque parallèle au cylindre.

Supposons, par exemple, que, par un point donné mm', **fig. 259, pl. 50**, on veuille construire un plan parallèle à un cylindre dont on connaît la direction, on construira la droite mn, $m'n'$ passant par le point donné ; puis, tous les plans passant par cette droite seront parallèles au cylindre.

On peut donc distinguer quatre cas :

1° Lorsque la trace np du plan ne rencontrera pas la trace du cylindre, le plan lui-même ne rencontrera pas le cylindre ;

2° Si la trace np' du plan est tangente en a à la trace du cylindre, le plan touchera le cylindre dans toute l'étendue de la génératrice ac ;

3° Si la trace np'' du plan coupait le cylindre en plusieurs points a', a'', a''', le plan couperait le cylindre suivant les génératrices $a'c'$, $a''c''$, $a'''c'''$;

4° Enfin, si la trace np''' du plan touchait la trace du cylindre en a^{IV} et la coupait au point a^{V}, le plan toucherait le cylindre suivant la génératrice $a^{IV}c^{IV}$ et le couperait suivant $a^{V}c^{V}$.

Il résulte évidemment de là que si la trace d'une surface cylindrique avait beaucoup de sinuosités, un même plan pourrait toucher et couper ce cylindre suivant un grand nombre de génératrices différentes.

508. Plan tangent au cylindre. *Construire un plan*

tangent à un cylindre par un point mm' *appartenant à la surface de ce cylindre*, **fig. 260**.

Le plan tangent devant contenir toutes les droites qui toucheraient la surface du cylindre au point donné, deux quelconques de ces lignes suffiront toujours pour déterminer sa position ; de sorte qu'il ne reste plus qu'à choisir, parmi toutes les tangentes au point *mm'*, celle dont la construction est la plus simple.

Or la génératrice qui contient le point donné devant être située dans le plan tangent, il ne restera plus qu'à obtenir une seconde ligne qui toucherait le cylindre au même point. On pourrait donc construire par ce point une section quelconque du cylindre (454), et le plan demandé serait déterminé par la tangente à cette courbe et par la génératrice *mb*, *m'b'* ; mais puisque nous savons que le plan tangent au cylindre doit le toucher dans toute l'étendue de la génératrice de tangence, on pourra remplacer la tangente au point *mm'* par toute autre droite qui toucherait le cylindre en un point quelconque de la génératrice *mb*, *m'b'*. Ainsi, dans l'exemple qui nous occupe, le plan tangent pourra être déterminé par la génératrice *mb*, *m'b'* et par la droite qui touche au point *b* la trace horizontale du cylindre, et qui, par conséquent, sera la trace horizontale du plan tangent cherché. Quant à la trace verticale, on l'obtiendra facilement en assujettissant ce plan à contenir le point *mm'* ou tout autre point de la génératrice *mb*.

509. *Normale*. On donne le nom de normale à toute droite perpendiculaire à une surface courbe. D'après cela, si l'on veut construire une normale en un point donné d'un cylindre, on construira d'abord le plan tangent par ce point, et la droite *mn*, *m'n'*, perpendiculaire au plan tangent (103), sera normale à la surface du cylindre.

Tout plan qui contiendrait la normale *mn*, serait un *plan normal* au point *m*.

510. *Construire un plan tangent à un cylindre par un point pris en dehors de sa surface.*

Soient, **fig. 261**, le cylindre A, A' et le point *m*, *m'*. On

construira parallèlement aux génératrices du cylindre la droite (mb, $m'b'$), et par le point (b) où cette ligne rencontrera le plan horizontal, on fera passer deux tangentes à la trace horizontale du cylindre ; ces deux lignes seront les traces horizontales de deux plans qui satisferont à la question. En effet, ces plans devant contenir la ligne (mb, $m'b'$) parallèle au cylindre, contiendront aussi les génératrices passant par les points de tangence c et d, et toucheront le cylindre suivant la longueur de ces génératrices.

511. *Construire un plan tangent à un cylindre parallèlement à une ligne donnée.*

Soient, **fig. 262, 263**, A, A′ le cylindre, et a, a', la droite donnée. En un point quelconque (m, m') de cette droite, on construira une seconde ligne bb' parallèle aux génératrices du cylindre. Ces deux lignes détermineront un plan p. En supposant que ce plan se meut parallèlement à lui-même, il viendra prendre la position des plans p' ou p''. Dans l'une ou dans l'autre position, il sera tangent au cylindre, car le plan p contenant la ligne (b, b') parallèle au cylindre, les plans p' et p'' parallèles au plan p contiendront tout entières les génératrices passant par les points de tangence c, d, et toucheront le cylindre suivant ces génératrices.

512. *Trouver l'intersection d'une ligne droite avec la surface d'un cylindre.*

Soit (a, a'), **fig. 264**, la droite donnée. On fera passer par cette droite un plan p parallèle au cylindre ; ce plan coupera la surface suivant deux génératrices (b, b) dont les intersections avec la ligne donnée a, a', seront les points cherchés (m, m') : l'un est celui par lequel la droite entre dans le cylindre, et l'autre celui par lequel elle en sort.

La portion mm, $m'm'$ de la ligne donnée est dans l'intérieur du cylindre.

Si la trace horizontale ps du plan auxiliaire ne rencontrait pas la trace du cylindre, on en conclurait que la ligne donnée ne rencontre pas le cylindre ; et si la trace ps touchait la

trace du cylindre, cela indiquerait que la ligne donnée est tangente au cylindre.

Le point de tangence serait déterminé par l'intersection de la ligne donnée *aa'* avec la génératrice, suivant laquelle le plan toucherait le cylindre.

513. Section du cylindre par un plan oblique. *Première méthode.* Nous avons eu l'occasion de construire (498) la section du cylindre par un plan perpendiculaire aux génératrices et au plan de projection. Nous avions précédemment (489, 490) construit la section par les plans de projection ou par des plans qui leur étaient parallèles.

Voyons actuellement ce qu'il faudrait faire pour construire la section d'un cylindre quelconque par un plan oblique.

514. Nous pouvons admettre dès à présent, comme principe général, que, pour obtenir la courbe suivant laquelle une surface quelconque est coupée par un plan, il suffit de construire les points suivant lesquels ce plan coupe un système de lignes tracées sur la surface, et qu'il ne restera plus, dans chaque cas particulier, qu'à choisir le système de lignes le plus simple. Ainsi, lorsqu'il s'est agi de construire l'intersection d'un polyèdre par un plan, nous avons dû chercher les points suivant lesquels ce plan coupait les arêtes du polyèdre. Nous construirons ici les points suivant lesquels le plan donné coupe les génératrices du cylindre ; de sorte que la question sera réduite à recommencer plusieurs fois les opérations nécessaires pour déterminer l'intersection d'une ligne droite par un plan (87).

Ainsi, **fig. 266, pl. 51**, pour construire le point où le plan oblique *p'pv* est percé par la génératrice 1-1 du cylindre donné, on emploiera comme surface auxiliaire le plan *h'lq* qui contient la génératrice dont il s'agit. Ce plan coupera le plan donné, suivant une droite *hq*, dont l'intersection avec la génératrice 1-1 déterminera le point cherché 1'.

En recommençant cette opération, il sera facile d'obtenir autant de points que l'on voudra.

515. Pour éviter la confusion, il ne faut pas, dès le com-

mencement, chercher des points trop près les uns des autres ; il vaut mieux déterminer des points intermédiaires quand on aura reconnu quelles sont les parties où la courbure de la ligne cherchée devient plus sensible.

516. On devra remarquer aussi que, dans la construction des courbes, les points sont toujours mieux déterminés par des tangentes que par des sécantes. En effet, si un point est obtenu par l'intersection de deux lignes *ab*, *ed*, **fig. 270**, tout le soin que l'on aura pu apporter à la construction de ces lignes ajoutera certainement à l'exactitude avec laquelle la position de ce point sera déterminée ; mais cela ne donnera aucune idée de la direction de la courbe en deçà et au delà du point dont il s'agit ; tandis que si l'on connaît une tangente, et que le point où cette ligne touche la courbe cherchée soit déterminé avec exactitude, on en pourra conclure la direction de cette courbe dans le voisinage du point de tangence. Enfin, il est évident que, par la construction d'un certain nombre de tangences, **fig. 271**, on pourra déterminer d'avance, avec une exactitude presque absolue, les changements et variations de courbure de la ligne cherchée.

517. On devra donc, dans l'exemple qui nous occupe, **fig. 266**, commencer par déterminer les points qui appartiennent aux génératrices 2-2, 4-4, 1-1, 3-3, les deux premiers étant ceux suivant lesquels la projection horizontale de la courbe touche les limites de la projection horizontale du cylindre, et les derniers appartenant aux limites de la projection verticale.

518. L'exactitude que l'on obtiendra dans la position de ces différents points dépendra en grande partie du soin avec lequel on aura déterminé les pieds des génératrices qui les contiennent.

C'est pourquoi il sera très-essentiel de vérifier d'abord les points de tangence 1, 2, 3, 4.

519. Tangente à la courbe de section. On se rappellera que la tangente en un point quelconque de la courbe

1′-2′-3′-4′ doit être située dans le plan tangent au cylindre (454); elle sera donc l'intersection du plan tangent et du plan coupant, d'où résulte la construction suivante.

On tracera : 1° la droite a-5 qui est la trace horizontale du plan tangent au point 5′ (508) ;

2° La droite a-5′, intersection du plan tangent a-5 avec le plan coupant $p'pv$, ce qui donne la projection de la tangence au point 5′.

Il est évident qu'un certain nombre de tangentes construites de cette manière avant la courbe permettront de la tracer avec une très-grande précision.

520. Pour obtenir dans sa véritable grandeur la courbe suivant laquelle le cylindre pénètre dans le plan donné, on rabattra ce plan en le faisant tourner autour de sa trace horizontale ou de toute autre droite parallèle au plan de projection.

Dans ce mouvement, chaque point devra parcourir un arc de cercle perpendiculaire à la charnière du rabattement ; il ne restera donc plus qu'à déterminer la distance de chacun des points de la courbe à cette droite (129). Les lignes d'opération n'ont été conservées que pour le point 4′ qui devient 4″ dans le rabattement.

521. Section plane du cylindre. *Deuxième méthode.* Il est utile, comme étude et comme exercice, de construire directement comme nous venons de le faire, la courbe de section d'un cylindre quelconque par un plan oblique ; mais, dans les applications, on préfère toujours avoir recours à des projections auxiliaires qui, en simplifiant le travail graphique, augmentent l'exactitude des résultats.

Ainsi, par exemple, les données étant les mêmes, on prendra un plan auxiliaire de projection A′Z′ vertical et perpendiculaire à la trace horizontale du plan donné et par conséquent perpendiculaire à ce plan.

Le pied d'une génératrice quelconque 6-6 se projettera par le point 6′ sur la ligne A′Z′.

On choisira sur cette génératrice un point quelconque mm',

dont la projection m'' s'obtiendra en faisant $m''o'$ égal à $m'o$. Enfin, la droite $6'm''$ sera la projection de la génératrice 6-6 sur le plan auxiliaire de projection A'Z'.

Cette première droite étant obtenue, le parallélisme des génératrices permettra de tracer autant de ces lignes que l'on voudra sur la projection auxiliaire.

Il sera utile surtout de construire les limites déterminées par les deux plans tangents perpendiculaires au plan de projection A'Z'.

La troisième trace vn'' du plan $p'pv$ s'obtiendra en prenant sur la première trace verticale un point quelconque n' que l'on projettera en u, et de là en n'', en faisant $u'n''$, **fig. 269**, égal à un', **fig. 266**.

Il résulte de cette nouvelle disposition d'épure, que le plan donné étant perpendiculaire au nouveau plan vertical A'Z', la projection de la courbe de section sur ce plan se réduit à une ligne droite zx, et qu'il ne restera plus pour déterminer la projection horizontale de cette courbe, qu'à tracer des perpendiculaires à la droite A'Z', par les points où la trace vn'' coupe les projections des génératrices du cylindre sur le plan de la figure **269**.

Le point x, le plus haut, et le point z, le plus bas de la courbe, seront déterminés sur les projections primitives par les droites xx', $x'x''$, zz', $z'z''$.

On pourra vérifier la position de ces points :

1° En exprimant que chacun d'eux est situé dans le plan $p'pv$.

2° En s'assurant qu'ils sont à la même hauteur sur les deux projections verticales, **fig. 266** et **269**.

522. Un autre avantage résulte encore de la disposition d'épure que nous venons d'adopter : c'est que, pour construire la courbe de section C dans sa véritable grandeur, il n'y aura plus à chercher la distance des différents points de cette courbe à la trace du plan donné, puisque les droites qui déterminent ces distances seront parallèles au plan de la nouvelle projection A'Z', et par conséquent projetées sur ce plan dans leur véritable grandeur. On pourra aussi projeter sur

ce plan les arcs de cercle parcourus par chacun des points de la section, lorsque l'on fait tourner cette courbe autour de la trace pv, pour la rabattre sur le plan horizontal de projection.

523. Nous avons obtenu la courbe de section C dans sa véritable grandeur, ce qui nous permettra de la tracer sur le plan donné ; et nous pourrions, par conséquent, la découper, s'il s'agissait de faire pénétrer le cylindre à travers une feuille mince de métal ; mais cela ne suffit pas. Il serait utile encore, pour donner plus de précision à l'assemblage des deux surfaces, de tracer la courbe de pénétration sur la surface du cylindre. Le moyen le plus simple pour obtenir ce résultat sera de développer le cylindre, en opérant comme nous l'avons fait au n° 498.

Ainsi, la droite $A''Z''$ est la trace d'un plan auxiliaire de projection verticale et parallèle au cylindre ; sd est le plan de la section droite qui est rabattue en D dans sa véritable grandeur. Enfin, la figure **268** est le développement de la portion de cylindre comprise entre la section droite et le plan horizontal de projection.

524. Si l'on voulait obtenir la tangente $a'''5^{IV}$ dans le développement du cylindre, **fig. 268**, on remarquerait que cette ligne appartient à un triangle $a'''5'''5^{IV}$, dont les trois côtés sont connus.

En effet, a-5, trace horizontale du plan tangent, est déterminée dans sa véritable grandeur ; la génératrice de tangence étant parallèle au plan de la figure **272**, est égale à sa projection 5^{VI}-5^{VII} sur ce plan. Enfin, la tangente est rabattue en a-$5'''$, suivant sa longueur réelle ; de sorte que si l'on fait, sur la figure **268**, a'''-$5'''$ égal à la trace horizontale a-5 du plan tangent, **fig. 266**, $5'''$-5^{IV} égale à la génératrice de tangence 5^{VI}-5^{VII}, **fig. 272**, enfin a'''-5^{IV} égal à a-$5'''$, le triangle $a'''5'''5^{IV}$ sera égal à celui dont on a les deux projections, **fig. 266**.

Il est évident que, si l'on a bien opéré, la droite a'''-$5'''$ doit être tangente à la courbe $4'''5'''4'''$, qui représente le développement de la trace horizontale du cylindre, et la droite

a'''-5^{IV} doit être tangente à la courbe $4^{V}\ 5^{IV} 4^{V}$, développement de la section du cylindre par le plan oblique $p'pv$.

525. La figure **273** représente les constructions nécessaires pour obtenir la courbe d'intersection d'un cylindre par un plan parallèle à la ligne AZ. Les opérations seront simplifiées par l'emploi d'un plan auxiliaire de projection pq, sur lequel la courbe cherchée se projettera par une ligne droite zx.

526. Sur la figure **267**, le plan coupant étant perpendiculaire au plan vertical de projection, la droite zx est la projection verticale de la courbe de section dont on obtiendra la projection horizontale en abaissant des perpendiculaires à la ligne AZ par tous les points où la droite zx coupe les projections verticales des génératrices du cylindre.

527. Enfin, si le cylindre proposé était perpendiculaire à l'un des plans de projection, **fig. 265**, il serait alors l'une des deux surfaces projetantes de la courbe cherchée; sa trace serait l'une des deux projections de cette courbe, et la seconde projection se construirait en opérant comme nous l'avons dit au n° 57.

528. Il peut être utile quelquefois d'obtenir la section droite d'un cylindre sans construire le développement de cette surface, on peut alors se dispenser d'employer une projection auxiliaire parallèle aux génératrices (502).

En effet, faisons tourner le plan de section droite msq, **fig. 274**, autour de sa trace horizontale sq. La trace verticale ms viendra se placer en sm''.

On pourra déterminer le point m'' en cherchant sa distance au point o. Mais il sera plus simple (149) de remarquer que le triangle projeté sur le plan horizontal par som' est rectangle au point o, et puisque l'on connaît dans leur véritable grandeur :

1° Le côté os de l'angle droit;

2° L'hypoténuse sm faisant partie de la trace verticale du plan donné,

On fera tourner cette hypoténuse autour du point s jusqu'à ce que le point m soit venu se placer en m'' sur la trace $m'm''$ du plan vertical dans lequel se meut le point m lorsque l'on fait tourner le plan de la section droite autour de sa trace horizontale sq.

Le plan msq étant rabattu en qsm'', supposons que nous voulons construire le point où ce plan est percé par la génératrice 1-1 : nous remarquerons d'abord (153) que cette droite est l'intersection des deux plans projetants p'-1-q', p''-1-q'' ; or, le premier de ces plans étant perpendiculaire à la trace horizontale sq, coupe le plan de section droite suivant une ligne v-1'' qui dans le rabattement se confond avec vq'. Ensuite, le plan p''-1-q'' perpendiculaire à la trace ms du plan donné coupe ce plan suivant une droite qui, dans le rabattement, devient u'-1''.

De sorte que le point 1'' suivant lequel se coupent les deux droites v-1'', u-1'', doit être l'intersection du plan qsm par la génératrice 1-1. La même opération étant recommencée pour toutes les génératrices du cylindre, on aura la section droite rabattue dans sa véritable grandeur.

529. Limites des courbes de section. Nous avons dit (516) que dans la construction des courbes, il faut chercher surtout à obtenir des tangentes, parce que ces lignes ont l'avantage de rendre sensible la direction de la courbe dans le voisinage du point de tangence.

Par conséquent, lorsque l'on cherchera la courbe de section d'une surface par un plan, on devra construire une tangente partout où il y aura quelque incertitude sur la direction de la courbe, et l'on a vu au numéro 519, que pour obtenir cette tangente il faut :

1° *Faire passer par le point dont il s'agit un plan tangent à la surface donnée* ;

2° *Construire l'intersection du plan tangent avec le plan coupant.*

Alors, on construit la tangente pour mieux déterminer la direction de la courbe ; mais il arrive souvent, au contraire, que l'on connaît la direction de la courbe et celle de la tan-

gente, de sorte que, dans ce dernier cas, c'est le point de tangence qu'il faut déterminer.

Ainsi par exemple, **fig. 1, pl. 52,** supposons que l'on veut obtenir le point le plus élevé de la courbe qui provient de la section du cylindre A par le plan P. On remarquera que pour ce point 1, la tangente T_1 doit évidemment être horizontale. Or, cette tangente étant l'intersection du plan tangent et du plan coupant, il faut que les traces horizontales de ces deux plans soient parallèles ; d'où résulte la construction suivante :

1° La droite *a* tangente à la trace horizontale du cylindre et parallèle à la trace horizontale du plan coupant P sera la trace horizontale du plan tangent P_1 qui contient le point le plus élevé 1 de la courbe demandée ;

2° La droite horizontale T_1 suivant laquelle le plan tangent P_1 rencontre le plan coupant P sera la tangente au point cherché 1 ;

3° Ce point sera déterminé par l'intersection de la tangente T_1 avec la génératrice G_1 suivant laquelle le cylindre est touché par le plan P_1. Le point 2, qui est le plus bas de la courbe demandée, sera déterminé de la même manière par le plan tangent P_2 dont la trace horizontale est parallèle à la trace horizontale du plan P.

530. Si l'on avait sur l'épure la trace verticale du cylindre, on pourrait, en opérant comme nous venons de le faire, déterminer le point *le plus près* ou *le plus éloigné* du plan vertical de projection ; mais on peut également réussir en employant la trace horizontale du cylindre donné.

En effet, on remarquera que la question que nous venons de résoudre n'est qu'un cas particulier de cette autre question beaucoup plus générale, par laquelle on demanderait de déterminer sur une courbe de section le point *le plus près* ou *le plus éloigné* d'un plan quelconque.

Or il est évident, **fig. 2**, que pour le point 7, qui est le plus près, ou pour le point 8 qui est le plus éloigné d'un plan quelconque P_9 la tangente T_7 ou T_8 sera toujours parallèle à ce plan.

Par conséquent, la tangente au point cherché devant être

située dans le plan P de la courbe de section et parallèle au plan donné P_9 sera parallèle à l'intersection du plan P avec le plan P_9 ou avec tout autre plan parallèle au plan P_9 d'où résulte la méthode suivante :

1° On construira, **fig. 4** et **5**, un plan quelconque P_{10} parallèle au plan donné P_9 **fig. 7** ;

2° On cherchera l'intersection du plan P et du plan P_{10};

3° La droite *uu'* que l'on obtiendra sera parallèle à la tangente demandée, de sorte que la question est réduite à *construire un plan tangent au cylindre, parallèlement à une droite connue.*

Or ce problème, résolu au n° 511, ne présente plus aucune difficulté.

En effet,

1° Par un point quelconque *oo'* de la droite *uu'*, **fig. 5**, on fera passer une droite *cc*, parallèle au cylindre ;

2° On déterminera les traces horizontales *m* et *n* des deux droites *uu'* et *cc'* ;

3° La droite *mn* sera la trace horizontale d'un plan parallèle aux plans tangents cherchés P_7 et P_8.

Les droites T_7 et T_8 suivant lesquelles le plan P rencontre les deux plans P_7 et P_8 seront les tangentes aux deux points 7 et 8 de la courbe de section, et ces points seront déterminés par la rencontre de ces tangentes T_7 et T_8 avec les génératrices G_7 et G_8 suivant lesquelles le cylindre est touché par les deux plans P_7 et P_8.

531. La figure **3** contient les opérations nécessaires pour déterminer le point *le plus près* et le point *le plus éloigné* du plan vertical de projection, dont l'intersection avec le plan P sera la trace verticale de ce dernier plan ; cette ligne, projetée par les droites *u* et *u'*, sera parallèle aux tangentes demandées, et la question revient par conséquent à construire deux plans tangents au cylindre, parallèlement à la trace verticale *uu'* du plan P.

Pour y parvenir (530) :

1° Par le point *oo'* pris à volonté sur la trace verticale du plan P, on construira la droite *cc'* parallèle au cylindre ;

2° La droite *mn*, qui contient les traces horizontales des

droites *uu'* et *cc'*, sera parallèle aux traces horizontales des deux plans tangents demandés ;

3° On construira les traces P_3 et P_4 de ces plans tangents ;

4° Les tangentes T_3 et T_4 aux points cherchés ;

5° Les génératrices G_3 et G_4 du cylindre détermineront ces deux points.

532. La figure **6** contient les opérations nécessaires pour déterminer le point qui est situé le plus à droite, et celui qui est situé le plus à gauche, sur la courbe demandée, ce qui revient à construire le point le plus *près* et le plus *éloigné* d'un plan P_{11} perpendiculaire à la ligne AZ. Ainsi :

1° La droite *uu'*, intersection du plan P par le plan P_{12} parallèle au plan P_{11} sera parallèle à la tangente cherchée ;

2° La ligne *uu'*, et la droite *cc'* parallèle au cylindre déterminent la trace horizontale *mn* d'un plan parallèle aux plans tangents P_5 et P_6 qui doivent contenir les points demandés 5 et 6 ;

3° On construira les traces horizontales P_5 et P_6 de ces plans tangents ;

4° Les tangentes T_5 et T_6 parallèles au plan P_{11} ;

5° Les génératrices de tangence G_5 et G_6 et les points demandés 5 et 6 seront alors connus.

533. Toutes ces opérations sont réunies sur la planche **53**, où l'on s'est proposé de déterminer la courbe de section d'un cylindre AA' par le plan P.

La concordance des lettres nous dispensera de répéter tout ce que nous avons dit pour expliquer les figures **1**, **3**, **5** et **6** de la planche précédente. Ainsi :

1° Les points 1 et 2 de la planche **53** ont été obtenus en opérant comme nous l'avons dit au n° 529 ;

2° Les points 3 et 4 par la méthode indiquée au n° 531 ;

3° Les points 5 et 6 par celle du n° 532 ;

4° Enfin, les points 7 et 8 sont le plus *près* et le plus *éloigné* du plan P_9 (530).

Le plan P_{10} parallèle au plan P_9 coupe le plan P donné suivant la droite *uu'*, qui détermine la direction des tangentes aux points cherchés.

La droite *uu'* et la ligne *cc'* parallèle au cylindre déterminent la trace horizontale *mn* d'un plan P_{11} parallèle aux plans tangents cherchés P_7 et P_8.

Les tangentes T_7 et T_8 parallèles à la droite *uu'* et les génératrices G_7 et G_8 du cylindre se coupent suivant les points cherchés 7 et 8.

Les opérations précédentes déterminent huit points et huit tangentes, et si l'on ajoute les quatre points situés sur les génératrices qui forment les limites des projections du cylindre donné, on aura certainement obtenu la courbe de section avec une grande exactitude.

534. *Section du cylindre*, 3e *méthode*. Nous avons vu :

1° Que la recherche de la ligne d'intersection d'un cylindre par un plan serait simplifiée par l'emploi d'un plan auxiliaire de projection perpendiculaire au plan coupant, et sur lequel, par conséquent, la courbe cherchée se projetterait par une ligne droite ;

2° Que cette disposition d'épure facilite le rabattement de la courbe de section, puisqu'elle donne directement les distances de chacun de ses points à la charnière, et que, de plus, elle permet de projeter les cercles parcourus par ces points, ce qui contribue beaucoup à rendre l'épure plus exacte et plus facile à comprendre ;

3° Enfin, nous avions eu précédemment l'occasion de reconnaître que, pour faire le développement d'un cylindre, il était utile de le projeter sur un plan parallèle à sa direction (502).

Une grande partie des opérations de l'épure précédente seraient évitées si l'on prenait, dès l'origine, **fig. 275, pl. 54**, un des deux plans de projection perpendiculaire au cylindre A, et le second plan de projection perpendiculaire au plan coupant *pc'p*.

Par suite de cette disposition, le plan donné et le cylindre deviendront les deux surfaces projetantes de la courbe demandée, qui aura pour l'une de ses projections la droite *aa*, et pour deuxième projection la courbe A'.

En faisant tourner le plan *p* autour de sa trace horizontale,

on obtiendra la courbe A″ pour la véritable grandeur de la section.

Enfin, la courbe A′ étant la section droite du cylindre, et les génératrices étant projetées sur le plan vertical dans leur véritable grandeur, il sera facile de construire le développement A″, dans lequel la courbe $a'm^{v}a'$ représente le développement de la section oblique aa.

535. La tangente $c''m^{v}$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont : $m^{iv}m^{v}$ égal à $m'm''$ génératrice de tangence ; et $c''m^{iv}$ égal à cm, trace du plan tangent et projection horizontale de la tangente.

La figure A‴ étant enveloppée sur le cylindre A, **fig. 280**, il sera facile le tracer la courbe de section.

536. On aurait tort de considérer la méthode précédente comme moins générale que celle du n° 513. En effet, les plans de projection ne sont autre chose que des conceptions géométriques adoptées par convention, pour faciliter la solution des problèmes. Le choix de ces moyens doit donc rester entièrement à la disposition de celui qui opère, et pourvu qu'il ne change rien aux données ni à leur position relative, la généralité de la question n'en sera pas moins complète.

J'insiste particulièrement sur cette remarque, parce que c'est surtout dans le choix des moyens d'opération que consiste toute l'habileté du praticien.

Il faut donc s'appliquer à reconnaître, dans chaque question générale, quelle doit être la disposition d'épure la plus commode, et, dans chaque cas particulier, quelles sont les relations qui, résultant de la nature des données, peuvent contribuer à simplifier le travail ou augmenter l'exactitude du résultat. Ainsi, par exemple, si le cylindre proposé dans l'exemple précédent avait pour directrice une ellipse, on pourrait construire un parallélogramme circonscrit à cette courbe; les côtés de ce parallélogramme seraient les traces de quatre plans tangents parallèles deux à deux, et les intersections de ces plans par le plan $pc'p$ donneraient le parallélogramme circonscrit à la courbe de section rabattue. Les droites qui joignent les milieux des côtés opposés du parallélogramme

sont, dans ce cas, les diamètres conjugués de la courbe de section.

Il peut cependant arriver quelquefois que l'on soit obligé d'opérer sur un cylindre incliné dans l'espace ; alors on emploiera des plans auxiliaires de projection, comme nous l'avons fait aux nos 521, 522.

537. *Transformations diverses de la courbe de section.* Si l'on suppose qu'un cylindre AA', **fig. 279** et **276**, soit coupé par un plan *pq*, et que l'on fasse tourner ce plan autour d'une ligne *vu*, **fig. 276**, la courbe de section augmentera de longueur à mesure que le plan se rapprochera de la direction du cylindre, et finira par se rapprocher en deux droites parallèles *m'n'*.

Parmi les différentes formes affectées par cette courbe, il faut distinguer surtout :

La section droite,

La section oblique,

La section parallèle.

On remarquera que, par suite de ces variations de courbure, la ligne de section se rapproche toujours de la tangente *m'n'*, avec laquelle elle finit par coïncider lorsque le plan devient parallèle au cylindre.

Il résulte de là que toute génératrice d'un cylindre peut être, à volonté, considérée comme une *section* dont le rayon de courbure serait infini, ou comme une *tangente* à cette même section.

Ainsi, les deux droites *m'n'* seront deux tangentes à la section du cylindre par le plan *mn*, **fig. 279**. Nous rappellerons que si l'on faisait tourner ce même plan autour de l'une des deux droites *m'n'*, il viendrait un moment où ces deux *tangentes ou génératrices de section* se réuniraient en une seule pour former une *génératrice de tangence* (450).

538. Si nous supposons que la section droite du cylindre proposé soit une ellipse ayant pour ses axes les deux droites *aa*, **fig. 276**, et *cc* **fig. 279**, et que l'on fasse tourner le plan coupant autour de la ligne *vu*, on obtiendra comme variétés principales de la courbe de section :

1° La section droite *aa*, *cc*;

2° La section *ac'* **fig. 279**, qui est un cercle, lorsque le rayon horizontal *ac'* est égal au rayon vertical *ac*, **fig. 276**;

3° La section elliptique *ac''* qui se projectera par un cercle, lorsque *cc''* projection verticale de *ac''* sera égal au rayon vertical *ac*;

4° La section oblique ac^{IV}, dont la longueur dépendra de l'obliquité plus ou moins grande du plan coupant;

5° Les deux droites parallèles *m'n'*, *m'n'*, provenant de la section par le plan parallèle au cylindre;

6° Enfin, la ligne de tangence, qui résulterait de la réunion des génératrices de section, si l'on faisait tourner le plan autour de l'une des deux génératrices *m'n'*.

La comparaison de ces diverses espèces de lignes donne lieu à des simplifications remarquables, suivant les différents problèmes à la solution desquels elles doivent concourir.

539. Supposons, par exemple, que, pour résoudre une question proposée, il soit nécessaire de construire, **fig. 278**, un grand nombre de sections d'un même cylindre par des plans horizontaux; on se rappellera que toutes ces courbes doivent être égales et parallèles à la trace du cylindre. Or, dans le cas où cette trace serait une ellipse, on construira successivement:

1° La trace *cc'c''*, qui doit contenir les centres de toutes les sections demandées;

2° Tous les axes de ces courbes qui doivent être parallèles à ceux de la trace;

3° Les droites *aa''*, passant par les extrémités des grands axes, détermineront ces points;

4° Les droites *bb''* détermineront les extrémités des petits axes;

5° Enfin, les deux droites *mm''*, *nn''* détermineront les points où les courbes cherchées sont touchées par les deux génératrices qui forment les limites de la projection horizontale du cylindre.

540. On pourrait encore dessiner l'une des courbes avec

beaucoup de soin sur une carte que l'on découperait, et qui, reportée à toutes les places, servirait à guider la pointe du crayon.

Il est évident que cette manière d'opérer serait surtout commode dans le cas où l'on aurait à tracer un grand nombre de fois une courbe très-compliquée, surtout lorsque l'on ne peut déduire de la définition de cette courbe aucun moyen d'abréger le travail ou de vérifier le résultat.

541. Aux abréviations provenant de la nature des courbes qui concourent à la solution des problèmes, il faut ajouter celles plus importantes encore qui résultent du choix des plans de projection.

Supposons, par exemple, que la question proposée donne lieu à la construction d'un grand nombre d'ellipses égales ou semblables entre elles, il est évident que le travail serait considérablement diminué, si l'on pouvait trouver un plan de projection sur lequel chacune de ces ellipses se projetterait par un cercle.

Or, la détermination de ce plan sera toujours facile. En effet,

Supposons que l'on ait obtenu, **fig. 277**, l'une de ces ellipses $avcu$, ou simplement les deux axes ac, vu, on construira d'abord une projection auxiliaire $a'c'$ sur un plan parallèle au grand axe et perpendiculaire au petit axe vu ; puis, après avoir décrit une demi-circonférence sur le diamètre $a'c''$, on fera le triangle rectangle $a'c''c'$ de manière que le côté $a'c''$ soit égal au petit axe vu de l'ellipse proposée. Cela étant fait, il est évident que sur tout plan, tel que pmp', qnq', perpendiculaire à la corde $c'c''$, et par conséquent parallèle à $a'c''$, l'ellipse se projettera par un cercle, puisque la droite $a'c''$, égale au petit axe de l'ellipse, sera la projection du grand axe $a'c'$.

Si on rabat le nouveau plan de projection pmp', en le faisant tourner autour de sa trace $p'm$, la projection de l'ellipse deviendra $a'''v'''c'''u'''$, et si on rabat autour de qn, on aura $a^{IV}v^{IV}c^{IV}u^{IV}$.

Les quarrés circonscrits à ces deux cercles sont les projections du rectangle circonscrit à l'ellipse donnée.

On obtiendrait le même résultat en projetant l'ellipse sur un plan quelconque perpendiculaire à la corde $a'c^{v}$.

542. La direction du nouveau plan de projection pmp' déterminée, supposons que l'on veuille projeter une seconde ellipse égale et parallèle à la première, et qui aurait pour centre le point x.

On construira successivement les points x', x'', x''', ou x^{iv}, suivant que l'on aura choisi le plan pmp' ou qnq'.

On construira ensuite la circonférence formant la projection de l'ellipse donnée.

543. Pour construire une ellipse semblable et parallèle aux précédentes, on projetterait le centre et l'extrémité de l'un des axes pour chacune de ces courbes, ce qui suffirait pour déterminer le centre et le rayon de la circonférence demandée.

544. Cylindre circulaire. Dans les articles qui précèdent. nous avons principalement cherché à mettre en évidence les propriétés communes à toutes les surfaces cylindriques. Cela pourrait suffire, s'il ne s'agissait que d'exposer la théorie générale de ce genre de surfaces ; mais je m'éloignerais du but que je me suis proposé dans cet ouvrage, si je négligeais d'appeler l'attention du lecteur sur les cas particuliers que l'on rencontre le plus souvent dans les applications.

Ainsi, par exemple, s'il s'agissait de construire les projections d'un cylindre circulaire terminé, comme le sont presque tous les cylindres employés dans l'industrie, par deux bases perpendiculaires à sa direction, les propriétés du cercle donneraient lieu à des simplifications qu'il serait utile de ne pas négliger.

545. Nous reconnaîtrons d'abord que lorsqu'un cercle amc, **fig. 284, pl. 55,** est incliné d'une manière quelconque par rapport à un plan p, la projection sur ce plan est toujours une ellipse.

En effet, on sait que lorsqu'un cercle et une ellipse ont un

diamètre commun *ac*, *les ordonnées de l'ellipse sont aux ordonnées correspondantes du cercle comme le deuxième axe de l'ellipse est au rayon du cercle*. Et réciproquement, *lorsque la relation que nous venons de citer a lieu, la courbe est une ellipse*. Or, c'est précisément ce qui arrive lorsqu'un cercle est projeté obliquement ; car les triangles rectangles mvn, $m'v'n'$ étant semblables, on doit avoir la proportion $mv : vn = m'v' : v'n'$, ce qu'il fallait démontrer. Ainsi la courbe *anc* est une ellipse.

546. On doit encore remarquer que si l'on projetait tous les diamètres du cercle, les droites que l'on obtiendrait pour ces projections seraient d'autant plus courtes que les diamètres projetés s'approcheraient davantage de la perpendiculaire au plan ; de sorte que si le point v est le centre du cercle *amc*, la droite vn, projection de vm, serait le rayon le plus court de l'ellipse *anc*, tandis qu'au contraire, le diamètre *ac*, parallèle au plan de projection ou situé dans ce plan, se projetterait dans sa véritable grandeur, et serait par conséquent le grand axe de l'ellipse dont vn serait le petit axe.

547. Supposons actuellement que l'on veuille projeter, **fig. 285**, un cylindre circulaire incliné par rapport aux deux plans de projection ; que les droites *ac*, *a'c'* soient les deux projections de l'axe de ce cylindre, et que le rayon de sa base soit connu.

Le moyen le plus simple sera de construire, **fig. 286**, une projection auxiliaire sur un plan vertical A'Z' parallèle à l'axe et par conséquent à la direction du cylindre demandé.

On fera $s'a''$ égal à sa' et $z'c''$ égal à zc', de sorte que la droite $a''c''$ sera la projection de l'axe *ac*, *a'c'* sur le nouveau plan de projection A'Z' ; le rayon $m''c''$ étant donné par la question, les deux droites $m''x''$, $m'''x'''$, perpendiculaires sur $a''c''$ seront les projections des deux bases, le rectangle $m''x''x'''m'''$ sera la projection du cylindre sur le plan vertical A'Z'.

548. Quant à la projection horizontale, elle sera limitée

par les deux droites hk, $h'k'$, parallèle à la ligne A'Z', et dont l'écartement hh' sera déterminé par le diamètre du cylindre.

Enfin, les deux bases $m''x''$, $m'''x'''$ auront pour projection les deux ellipses hh', kk' dont les grands axes sont égaux au diamètre du cylindre, et qui ont pour petits axes les deux droites mx, $m^{\text{IV}}x^{\text{IV}}$, projections horizontales des diamètres $m''x''$, $m'''x'''$.

549. La courbe mn, trace horizontale du cylindre, est une ellipse ; car si on prend les droites hh', bb' pour axes des abscisses des deux courbes mx, mn, il sera facile de démontrer que les ordonnées correspondantes à une abscisse commune seront toujours entre elles comme les droites cx, vn, qui alors forment les seconds axes de ces courbes.

Il est utile de reconnaître ainsi la nature des courbes que l'on doit tracer, parce qu'alors on peut déduire de leur définition géométrique des moyens plus simples de les construire.

550. On pourrait prendre pour directrice, les bases ou la trace du cylindre dont il s'agit, mais il vaudra mieux employer pour cet usage le cercle mv, que l'on peut considérer comme représentant la base $m''x''$ que l'on aurait fait tourner autour de l'horizontale mm'' jusqu'à ce qu'elle soit rabattue dans sa véritable grandeur sur le plan horizontal de projection.

551. Il arrivera souvent ainsi, par la suite, lorsqu'un cercle fera partie des lignes nécessaires à la solution d'un problème, que l'on préférera le rabattre, afin d'éviter la construction de l'ellipse qui résulterait de sa projection.

552. Enfin, si par le point v on mène la droite vv'' perpendiculaire à A'Z', on déterminera sur le cylindre une section oblique $m''v''$ qui aurait pour projection horizontale la circonférence mv. Il est évident que cette courbe sera la directrice la plus simple, puisqu'elle dispensera de faire le rabattement de la base ou la construction de la trace.

Ainsi on pourra, selon les circonstances, prendre pour directrice du cylindre, la base mx, la trace mn, la circonférence mv, qui est la base rabattue sur le plan horizontal de

projection, ou enfin la section oblique $m''v''$, qui a pour projection horizontale la circonférence mv.

C'est principalement lorsque le cylindre sera parallèle à l'un des plans de projection que l'usage de cette dernière directrice sera très-commode.

553. Pour construire la projection verticale du cylindre, **fig. 282**, on tracera la droite $a'a'''$ perpendiculaire sur $a'c'$, on fera $a'a'''$ égal à sa ; ce qui donnera la ligne da''', qui représente l'axe du cylindre rabattu sur le plan vertical de projection, on fera rt égal au diamètre du cylindre et perpendiculaire sur da'''.

Cette construction auxiliaire pourra être effacée dès qu'elle aura servi à déterminer les axes de l'ellipse $r't'$, qui est la projection verticale de l'une des bases du cylindre.

Les mêmes axes serviront pour construire la projection verticale $r''t''$ de la base inférieure.

Il est essentiel de remarquer que les ellipses $r't'$, $r''t''$, **fig. 282**, ne sont pas semblables aux deux ellipses mx, $m^{IV}x^{IV}$ de la figure **285**.

554. On opérera pour le petit cylindre comme pour le grand. Les bases de ces deux cylindres étant parallèles, leurs projections sur un même plan doivent être semblables. Ainsi lorsque l'épaisseur du petit cylindre sera déterminé, il suffira de construire la corde ie parallèle à kx^{IV}, ce qui donnera le petit axe de l'ellipse ig.

Cette remarque pourra servir dans les dessins de machines où l'on a souvent à construire les projections obliques d'un grand nombre de cylindres circulaires et parallèles entre eux. Cela dispensera de faire une projection auxiliaire pour chaque cylindre.

555. Pour exprimer qu'un point pp' appartient à la surface du cylindre, on construira les projections de la génératrice qui passe sur ce point.

556. La droite $q\alpha$ est la trace horizontale d'un plan qui

toucherait le cylindre dans toute la longueur de la génératrice $\alpha''\alpha'''$.

$q\alpha''$ est une tangente à la base.

Enfin, la droite $q\alpha'$ peut être indifféremment considérée comme une tangente à la base $m''x''$ rabattue en mv ou comme une tangente à la section oblique $m''v''$.

557. La figure **283** contient les deux projections d'un cylindre circulaire parallèle au plan horizontal ; on prendra pour directrice la section par le plan vertical pq, dont on déterminera la direction en abaissant les deux perpendiculaires aa', cc''.

On pourrait prendre également pour directrice la section par le plan vertical $p'q'$; mais la rencontre de ce plan par les génératrices du cylindre se ferait suivant des angles trop aigus.

558. Enfin, il est évident que lorsqu'on sera le maître de choisir les plans de projection, le plus simple sera de placer le cylindre perpendiculairement à l'un d'eux, **fig. 281.**

559. Intersection des cylindres. *Trouver la courbe de l'intersection de deux cylindres.*

Il est évident que l'on résoudrait la question proposée, en déterminant les points où la surface de l'un des cylindres donnés serait rencontrée par chacune des génératrices de l'autre cylindre ; de sorte que tout se réduirait à recommencer plusieurs fois de suite les opérations de l'épure du n° 512. Mais il sera, en général, plus simple d'opérer de la manière suivante :

560. 1re *méthode.* Soient, **fig. 239, pl. 56,** AA′ et BB′ les deux cylindres dont on demande l'intersection. Par un point quelconque (m, m'), on construira deux droites parallèles aux génératrices des cylindres donnés ; ces deux droites détermineront (507) un plan p qui coupera le cylindre AA′ suivant deux de ses génératrices désignées sur l'épure par (a, a). Le même plan coupera le cylindre BB′ suivant deux génératrices (b, b). Or, ces quatre lignes étant dans un même

plan, donneront par leurs intersections quatre points (u, u, u, u) appartenant à la courbe cherchée.

On obtiendra les projections verticales de ces points, en projetant les génératrices qui les contiennent.

Un second plan parallèle au plan p, et par conséquent parallèle aux deux cylindres, déterminera quatre nouveaux points.

Un troisième plan en donnera quatre autres, et ainsi de suite.

On continuera ces opérations jusqu'à ce que l'on ait obtenu un nombre de points suffisants pour que l'on puisse tracer la courbe avec beaucoup d'exactitude.

561. Il ne faut pas établir de suite sur l'épure un trop grand nombre de plans coupants. On fera bien, au contraire, de commencer par la recherche de quelques points essentiels, de ceux surtout qui, par leur position, pourraient donner une première idée de la forme de la courbe. On chercherait ensuite des points intermédiaires dans les parties où la courbure deviendrait plus sensible. On devra surtout ne pas négliger les points où la courbe cherchée doit occuper les génératrices principales.

Pour avoir les points qui appartiennent aux limites des projections verticales et horizontales des deux cylindres, on emploiera les plans coupants dont les traces passent par les pieds des génératrices qui forment ces limites.

Les plans tangents p', p'', parallèles aux deux cylindres, détermineront aussi des points très-importants.

Ainsi, par exemple, le plan p', qui touche en b' la trace horizontale du cylindre B, déterminera les points u', u' suivant lesquels la courbe cherchée est touchée par les génératrices a', a' du cylindre B.

De même le plan p'', qui touche en a'' la trace horizontale du cylindre A, déterminera les points u'', u'' suivant lesquels la courbe demandée est touchée par les génératrices b'', b'' du cylindre B.

562. Il n'est pas nécessaire de construire de plan coupant hors de l'espace compris entre les plans p' et p'' dont les

traces touchent celles des cylindres donnés, car il est évident que tout plan hors de cet espace couperait l'un des cylindres sans toucher ni couper l'autre, et par conséquent ne contiendrait pas de points communs. Lorsque la courbe sera entièrement obtenue, on regardera comme vu, tout point provenant de l'intersection de deux génératrices vues (487). Tous les autres points sont cachés, et l'on tracera en ligne pleine toute la partie de la courbe qui contient les points vus, et le reste en ligne ponctuée.

563. *Tangentes à la courbe d'intersection.* Lorsqu'il y aura incertitude sur la direction de quelque partie de la courbe, on la fera cesser en construisant une tangente. Pour y parvenir, on remarquera que cette ligne devant être tangente aux deux cylindres, il faut, par conséquent, qu'elle soit située en même temps dans les plans tangents à ces deux surfaces, d'où il résulte qu'elle doit être l'intersection de ces plans ; ainsi, par exemple, la droite $a'''v$ est la trace horizontale du plan qui touche le cylindre A dans toute l'étendue de la génératrice $a'''u$.

Ensuite, vb''' est la trace du plan vertical qui touche le cylindre B suivant la génératrice $b'''u$.

Le point v, intersection de ces deux traces, fera donc partie de la tangente dont la projection verticale sera $v'u$.

L'un des plans tangents étant vertical, la projection horizontale de la tangente doit se confondre avec la trace $b'''v$ de ce plan.

Il est évident que si les deux points tangents étaient obliques, cela ne changerait rien à la manière d'opérer.

564. *Développements.* Si on veut obtenir la courbe d'intersection sur les surfaces des deux cylindres, il faudra projeter chacun d'eux sur un plan parallèle à ses génératrices, **fig. 295** et **296**, puis on construira la section droite et les développements A^{IV} et B^{IV}, en opérant comme nous l'avons fait au n° 502.

Il sera très-essentiel de s'assurer que tous les points correspondants des deux cylindres et de la courbe d'intersection

sont à la même hauteur sur les trois projections verticales A'B, A'' et B''.

Pour construire la tangente *vu*, *v'u'*, sur le développement du cylindre A, on construira le triangle qui a pour côté :

1° *a'''v* trace horizontale de l'un des deux plans tangents;

2° *a'''u* génératrice de tangence projetée, **fig. 296**, dans sa véritable longueur;

3° La tangente *vu*, dont la longueur *v''u* est donnée sur la projection B''.

On raisonnera de la même manière pour construire la tangente sur le développement du cylindre B.

Si la tangente n'était pas parallèle à l'un des plans de projection, on chercherait sa longueur par le moyen ordinaire.

565. Quelquefois l'un des cylindres pénètre dans l'autre, et s'y trouve entièrement engagé; alors l'intersection se compose de deux courbes séparées, l'une d'entrée et l'autre de sortie, comme on le voit, **fig. 290** ; dans ce cas, on dit qu'il y a *pénétration* (302). Mais si l'un des deux cylindres n'était pas tout à fait engagé dans l'autre, l'intersection se nommerait *arrachement*, **fig. 288**.

Dans la question que nous venons de résoudre, il y avait arrachement.

566. Il est facile de prévoir, avant la construction de l'épure, quand il doit y avoir arrachement ou pénétration.

Ainsi, dans le cas représenté, **fig. 291**, il y aura pénétration. En effet, le cylindre B étant compris entièrement entre les deux plans *p'* et *p''*, il est évident que toutes les génératrices de ce cylindre rencontreront la surface du cylindre A.

Tandis que sur la figure **287**, on voit par la disposition des deux plans *p'* et *p''* que les génératrices du cylindre A, qui ont leurs pieds sur l'arc *aa'*, ne rencontreront pas le cylindre B, tandis que les génératrices du cylindre B, qui ont leurs pieds sur l'arc *bb'*, ne rencontreront pas le cylindre A.

Enfin on peut dire, en général, que si les deux plans coupants extrêmes *p'* et *p''*, **fig. 291**, sont tangents à la trace

du même cylindre, il y aura pénétration ; et dans le cas contraire, il doit y avoir arrachement.

567. Pour tracer les courbes de pénétration sur les cylindres donnés, **fig. 292** et **293**, on enveloppera sur ces corps les figures A^{IV} et B^{IV}.

568. Limites des courbes d'intersection. Lorsque l'on construit la courbe d'intersection de deux surfaces, on peut se proposer d'obtenir le point le plus près ou le plus éloigné d'un plan donné.

Ainsi, par exemple, **fig. 2** et **4, pl. 57**, les cylindres B et C étant donnés par leurs traces et par leurs directions, on construira le plan P parallèle à ces deux cylindres, et les plans coupants P_1 P_2 P_3 etc., parallèles au plan P, détermineront autant de points que l'on voudra sur la courbe d'intersection.

Or, si l'on veut déterminer le point le plus *élevé* de cette courbe, on pourra opérer de la manière suivante.

569. *Première méthode* :

1° On cherchera quelle peut être approximativement la position du point le plus élevé, et l'on déterminera trois ou quatre points dans le voisinage de celui que l'on cherche.

On fera en sorte qu'il y en ait au moins un au delà. Supposons, par exemple, que l'on ait déterminé les points 1, 2 et 3;

2° On construira les traces horizontales des plans V_1 V_2 et V_3 des plans qui touchent le cylindre B aux points 1, 2 et 3;

3° On construira également les traces horizontales Y_1 Y_2 Y_3 des plans qui touchent le cylindre C suivant les mêmes points;

4° On choisira, **fig. 3**, un point quelconque M, que l'on peut supposer situé où l'on voudra dans l'espace;

5° On tracera par le point M de la figure **3** les droites v_1 v_2 v_3 parallèles aux traces horizontales V_1 V_2 V_3 des trois plans tangents aux points 1, 2 et 3 du cylindre BB';

6° On tracera également par le point M de la figure **3** les droites y_1 y_2 y_3 parallèles aux traces horizontales Y_1 Y_2 Y_3 des trois plans tangents aux points 1, 2 et 3 du cylindre CC';

7° On ouvrira le compas d'une quantité quelconque Mu, et l'on portera cette distance *une fois* sur chacune des droites v_1 et y_1 *deux fois* sur chacune des droites v_2 y_2 et *trois fois* sur chacune des droites v_3 et y_3.

8° On tracera les deux courbes uv, $u'v'$ qui se couperont en un point O que l'on joindra avec le point M.

9° La droite MO sera parallèle aux traces des deux plans tangents V_4 et Y_4 qui contiennent le point 4 qui est le plus *élevé* de la courbe de pénétration.

En effet, de la loi suivant laquelle ces courbes uv et $u'v'$ de la figure **3** ont été tracées, il résulte évidemment que, si l'on prend sur ces courbes deux points z et z' à égale distance du point M, les droites Mz et Mz' seront parallèles aux traces horizontales des deux plans qui toucheront les cylindres donnés en un même point de la courbe d'intersection, ce qui sera encore vrai pour les deux plans tangents, dont les traces horizontales seront parallèles à la droite MO ; mais alors ces deux traces seront parallèles, et leur intersection, tangente au point correspondant de la courbe cherchée, étant horizontale, ce point sera évidemment le plus *élevé* de la courbe d'intersection des deux cylindres (529).

On déterminera de la même manière le point le plus bas ainsi que le point le plus élevé sur toutes les courbes de pénétrations ou sur les diverses parties des courbes d'arrachements.

570. Les deux courbes uv, $u'v'$ peuvent être tracées d'une infinité de manières, pourvu que les distances sur les droites désignées par le même chiffre soient égales entre elles, ce qui permettra toujours d'obtenir le point O par une bonne intersection.

571. *Deuxième méthode.* Le moyen que nous venons d'indiquer n'est pas général et ne peut servir que pour déterminer le point le plus *élevé* et le plus *bas* de la courbe de pénétration, car il est évident que, si l'on voulait employer la même méthode pour obtenir le point le plus *près* ou le plus *éloigné* du plan vertical de projection, il faudrait connaître les traces verticales des cylindres ; et pour le point le

plus *près* ou le plus *éloigné* d'un plan quelconque, il faudrait construire les intersections des deux cylindres par ce plan, ce qui serait fort long.

Or la question qui nous occupe peut être résolue d'une manière générale par la méthode suivante :

1° Lorsque l'on aura déterminé un certain nombre de points de la courbe cherchée, on construira une tangente par chacun de ces points;

2° On transportera toutes ces tangentes en un point quelconque SS′ de l'espace, **fig. 5** et **1**;

3° On obtiendra ainsi une surface conique dont chaque génératrice sera parallèle à l'une des tangentes de la courbe de pénétration des deux cylindres donnés;

4° On coupera cette surface conique, **fig. 5**, par un plan P_6 que l'on pourra choisir à volonté, et par conséquent perpendiculaire à l'un des plans de projection;

5° La courbe plane *u′v′*, **fig. 1**, qui résulte de la section par le plan P_6 de la figure **5**, pourra être prise pour directrice de la surface conique qui a pour sommet le point SS′, **fig. 5** et **1**;

6° Ce qui précède étant admis, si l'on veut avoir le point le plus *près* ou le plus *éloigné* d'un plan quelconque P_7, **fig. 6**, on coupera la surface conique qui est projetée sur les figures **5** et **1**, par un plan parallèle au plan P_7 et passant par le sommet SS′. Toutes les génératrices de section que l'on obtiendra seront parallèles aux tangentes qui contiennent les points de la courbe cherchée qui sont les plus *près* ou les plus *éloignés* du plan donné P_7, **fig. 6**;

7° Il ne restera donc plus qu'à construire les plans tangents aux deux cylindres, parallèlement à chacune des génératrices provenant de la section du cône SS′ par le plan parallèle à P_7.

Pour ne pas surcharger l'épure on n'a pas exécuté cette partie de l'opération qui d'ailleurs ne présente aucune difficulté si l'on efface les lignes de construction à mesure que les résultats sont obtenus.

572. On n'a conservé ici que les constructions nécessaires pour déterminer par cette seconde méthode le point le plus élevé de la courbe de pénétration ; ainsi :

1° La tangente au point cherché devant être horizontale, on a coupé le cône auxiliaire par le plan horizontal P_8 qui contient le sommet SS′ de ce cône;

2° La génératrice S-4 que l'on obtient, **fig. 5**, est parallèle à la tangente T_4 qui contient le point le plus *élevé*, et par conséquent aux traces horizontales V_4 et Y_4 des deux plans tangents qui se coupent suivant cette tangente.

Les génératrices désignées sur les deux cylindres par le n° 4 se coupent suivant le point cherché.

573. Il est évident que si l'on veut se contenter du point le plus *élevé* de la courbe de pénétration, il suffira de construire trois ou quatre tangentes dans le voisinage du point demandé.

Pour obtenir ces tangentes on pourra construire les traces verticales des plans tangents correspondants ; mais pour ne pas embarrasser l'épure on a effacé ces traces, excepté à l'endroit où elles coupent le cadre.

On a cependant conservé entièrement les traces verticales des deux plans tangents V_4 et Y_4 qui contiennent le point demandé.

574. *Courbes d'essais.* Pour résoudre la question précédente, nous avons fait usage, **fig. 3**, de courbes telles que uv, $u'v'$, que l'on nomme quelquefois *courbes d'erreurs*, mais qui seraient plus convenablement désignées par le nom de *courbes d'essais ;* car il n'y a aucune erreur dans la construction de ces courbes, qui satisfont toujours très-exactement à la loi de leur définition.

C'est donc le nom de courbes d'essais que nous emploierons toutes les fois que nous jugerons utile de construire ces sortes de lignes.

L'usage des courbes d'essais est extrêmement fécond et donne la solution d'un grand nombre de problèmes qui sans cela ne pourraient être résolus que par des calculs algébriques très-pénibles, et qui, quoique vrais en théorie, seraient souvent inapplicables dans la pratique.

575. Intersection des cylindres. *Deuxième méthode.*

Il est presque toujours possible d'éviter la plus grande partie des opérations précédentes en faisant usage de plans de projection plus favorablement disposés par rapport aux deux cylindres dont on veut construire la pénétration.

Dans ce but, on placera, **fig. 299, pl. 58**, l'un des cylindres perpendiculairement à l'un des plans de projection que nous supposerons ici être le plan horizontal, et l'on prendra le second plan de projection parallèle en même temps aux deux cylindres.

Par suite de cette disposition d'épure, le système de plans coupants auxiliaires sera parallèle au plan vertical.

Chacun de ces plans coupera le cylindre A suivant deux droites verticales, et le cylindre B suivant deux génératrices.

Les intersections de ces lignes détermineront comme précédemment, tous les points cherchés.

La figure B′ est le développement du cylindre B, et A′ est le développement de la partie du cylindre A qui a pour directrice la courbe *aco*.

576. Quand les deux cylindres proposés seront circulaires, la trace du cylindre A sera une circonférence de cercle, et cette courbe servira en même temps de section droite au cylindre A ; quant au cylindre B, il aura pour trace l'ellipse *vu*, mais on pourra, comme nous l'avons dit au n° 552, éviter la construction de cette courbe en employant, comme directrice, la circonférence *vu′* qui sera, si l'on veut, la base *vu″*, rabattue sur le plan horizontal de projection, ou plus simplement encore, la section par le plan oblique *vu″* (552).

577. Quoique dans l'exemple qui précède nous ayons choisi des cylindres circulaires afin de familiariser le lecteur avec les combinaisons que l'on rencontre le plus souvent dans la pratique, il est facile de reconnaître que la même disposition d'épure pourra être adoptée dans tous les cas, et qu'il suffira pour rendre à la question toute sa généralité de supposer que la directrice est une courbe quelconque au lieu d'être une circonférence de cercle.

578. Dans la figure **300**, les deux cylindres proposés étant

perpendiculaires aux plans de projection, sont les deux surfaces projetantes de la courbe de pénétration. Il n'y aura donc aucune opération à faire pour obtenir cette ligne dont les projections se confondront avec les traces des cylindres.

579. Les lignes provenant de l'intersection de deux cylindres participent de la courbe de ces surfaces, c'est pourquoi elles sont en général des courbes *à double courbure* (458).

580. Dans quelques cas particuliers cependant, les courbes peuvent être planes.

Si par exemple il s'agissait de l'intersection de deux cylindres A et B, **fig. 298,** qui auraient pour directrices les ellipses aca, $a'c'a'$; si, de plus, les axes oc, $o'c'$ étaient égaux, la courbe de pénétration se composerait de deux ellipses $a''c''$. Mais lorsque les axes oc, $o'''c'''$ ne sont pas égaux, la courbe de pénétration $a^{IV}c^{IV}a^{IV}$ est à double courbure.

581. Si les deux cylindres proposés étaient parallèles, ils se couperaient suivant des génératrices dont les positions seraient déterminées par les points de rencontre des traces. C'est évidemment la combinaison la plus simple qui puisse résulter de l'intersection de deux cylindres.

Cette remarque peut être appliquée avec avantage dans le cas où il s'agirait de *trouver l'intersection d'une ligne courbe quelconque avec la surface d'un cylindre.*

Soit, par exemple, **fig. 304**, la courbe donnée bb, on prendra sur cette ligne plusieurs points 1, 2, 3, par lesquels on fera passer des parallèles au cylindre ; on aura, par cette construction, une nouvelle surface cylindrique, parallèle à la première, et qui la coupera suivant les deux génératrices communes cm, $c'm'$, passant par les points c, c suivant lesquels les traces des deux cylindres se rencontrent ; les intersections de la courbe donnée avec les droites cm, $c'm'$ sont les points demandés.

En général, le nombre des points d'intersection est le même que celui des points communs aux traces des deux cylindres.

Si la trace $b'b'$ du cylindre auxiliaire touchait la trace du

cylindre donnée, on en conclurait que cette dernière surface est tangente à la première, que par conséquent la ligne *b* est tangente au cylindre.

582. On aurait pu employer pour surface auxiliaire l'un des deux cylindres projetants de la courbe donnée ; dans ce cas, les droites *cm*, *c'm'* seraient remplacées par la courbe à double courbure provenant de l'intersection des deux cylindres.

583. *Raccordement de deux cylindres.*

On dit, en général, que deux surfaces se raccordent lorsque l'une d'elles devient le prolongement de l'autre, et qu'elles paraissent ne former ensemble qu'une seule et même surface.

Or cette condition sera évidemment remplie, si les deux surfaces ont les mêmes plans tangents dans toute l'étendue de la ligne de raccordement.

Ainsi, par exemple, si deux surfaces cylindriques parallèles, **fig. 303**, avaient pour directrices les arcs *aco, ovu* qui se touchent au point *o*, il est évident que ces deux cylindres se raccorderaient, puisqu'ils seraient touchés tous les deux par un même plan qui contiendrait la génératrice *os*, et qui aurait pour trace horizontale la droite *pp* tangente aux traces des deux cylindres. La droite *os* serait la génératrice de raccordement.

584. On rencontre dans l'architecture de fréquents exemples de ces raccordements de cylindres.

La surface de la moulure projetée, **fig. 301** et **302**, se compose de deux portions de cylindres circulaires ayant pour directrices les arcs de cercle *ao*, *oc* ; ces deux cylindres se touchent et sont touchés suivant toute l'étendue de la génératrice commune *oo'* par un même plan *pq* perpendiculaire au plan vertical de projection.

Une deuxième moulure, égale à la première, la rencontre à angle droit, suivant une courbe plane et verticale qui a pour projection horizontale la droite *b'a'*, **fig. 580.**

585. Problème. *Question proposée en* 1853 *pour le concours d'admission à l'École des beaux-arts.* Étant donnés,

pl. 59, fig. 4, le plan P et la droite OK, située dans ce plan, on demande : 1° de construire les projections de trois cylindres circulaires de même rayon, ayant pour axes, la droite donnée OK, une seconde droite OL, perpendiculaire sur OK et située dans le plan P ; enfin, une troisième droite OU perpendiculaire sur les deux premières et passant par leur point d'intersection.

On sait (580) que si deux cylindres circulaires ont des rayons égaux, et que leurs axes se rencontrent, les courbes de pénétration seront deux ellipses.

Or, **fig. 2**, une sphère qui aurait le même rayon que les cylindres demandés, et dont le centre coïnciderait avec le point commun aux trois axes, serait évidemment inscrite dans les trois cylindres, et si l'on circonscrit à cette sphère un cube dont les arêtes soient parallèles aux cylindres, les sections du cube par les six plans diagonaux seront les rectangles circonscrits aux six ellipses provenant des intersections des trois cylindres combinés deux à deux ; de sorte que tout se réduit à la projection oblique d'un cube dont les arêtes opposées déterminent les six parallélogrammes conjugués des ellipses demandées.

La figure **1** indique la disposition de l'épure ; ainsi le plan P étant déterminé par sa trace horizontale et par l'angle Z'K'P, qui exprime son inclinaison, on projettera le point O de la droite OK sur un plan vertical de projection A'Z', perpendiculaire à la trace horizontale ZK du plan P.

Ce dernier plan étant rabattu en tournant autour de sa trace horizontale ZK, le point O viendra se placer en O'', et la droite donnée OK, O'K' se rabattra en O''K.

La droite O''L, perpendiculaire sur O''K, sera l'axe du second cylindre, et l'axe du troisième cylindre se projettera par le point O'' sur le plan P rabattu.

Le cercle décrit du point O'' comme centre, avec le rayon donné pour chacun des trois cylindres, sera la projection de l'un d'eux sur le plan P ; et le carré A''B''C''D'' sera la projection du cube circonscrit à la sphère qui est enveloppée par les trois cylindres.

Cela étant fait, on projettera le cube sur le plan auxiliaire A'Z', d'où on déduira sa projection horizontale.

Lorsque la projection horizontale du cube sera complète, il sera facile de construire toutes les ellipses de pénétration, puisque l'on connaît les diamètres conjugués de chacune d'elles.

Supposons, par exemple, **fig. 4**, que l'on veut construire l'ellipse inscrite dans le parallélogramme, qui a pour côtés opposés les deux arêtes AB et HG du cube ; on tracera : 1° les deux droites AH et BG, ce qui complétera le périmètre du parallélogramme conjugué de l'ellipse demandée 4-x-6-y ; 2° on déterminera le milieu de chacun des côtés de ce parallélogramme, et les droites 4-6 et xy seront les deux diamètres conjugués de l'ellipse, que l'on tracera par le moyen donné au n° 395 ou bien en construisant les axes, comme nous l'avons dit au n° 396.

Pour diminuer la confusion sur les figures **4** et **7**, on a distingué par une teinte de points les deux ellipses provenant de la rencontre des cylindres M et N. Ces ellipses sont projetées sur la figure **3** par les diagonales du carré A″D″C″B″.

Les quatre autres ellipses sont indiquées par un simple trait sur les figures **4** et **6**. Les parties vues de ces ellipses sont en lignes pleines ; les parties réelles cachées en points mixtes, et les parties supprimées par le passage des cylindres en points ronds.

On peut obtenir une très-grande exactitude dans le résultat, en déterminant d'avance sur les trois projections, **fig. 3**, **7** et **4**, les quatorze points de vérification que nous allons indiquer.

D'abord, les points 1 et 2, projetés en un seul sur la figure **3**, sont situés à la rencontre des deux ellipses désignées par des teintes ponctuées sur les figures **4** et **7**. Ces points seront déterminés sur la figure **7** en faisant les distances O′-1 et O′-2, égales chacune au rayon de la sphère inscrite dans les trois cylindres.

Les points 3 et 5 proviennent de la rencontre des deux ellipses suivant lesquelles se pénètrent les cylindres M et V. Ces deux points, situés dans le plan P, seront projetés, **fig. 7**, sur la trace du plan P, d'où il sera facile d'obtenir leurs projections horizontales, **fig. 4**.

Il en sera de même des points 3 et 6, suivant lesquels se

coupent les deux ellipses provenant de la pénétration des cylindres N et V.

Indépendamment des six points dont nous venons de parler, et par chacun desquels passent deux des six ellipses cherchées, il existe encore huit points suivant lesquels les mêmes ellipses se rencontrent 3 à 3.

Ces huit points sont déterminés sur la figure **3** par la rencontre des diagonales du carré A″D″C″B″ avec la circonférence du cercle, dont la surface teintée en hachure est la section droite du cylindre V.

La perpendiculaire abaissée sur la droite A′Z′ par la projection commune des points 7 et 8 de la figure **3** déterminera le point *m* que l'on ramènera en *m′* par un arc de cercle décrit du point K′ comme centre ; et la perpendiculaire élevée par ce point *m′* sur la trace K′H′ du plan P, **fig. 7**, contiendra les projections correspondantes des points 7 et 8, que l'on obtiendra en faisant *m′*-7 et *m′*-8, égales chacune à la perpendiculaire abaissée du point 7, 8 sur l'un des rayons O″-3 ou O″-6 de la figure **3**.

En opérant de la même manière, on déterminera sur la figure **7** les projections des points 9, 10, 11, 12, 13 et 14.

On remarquera que sur la figure **7** les huit points 7, 9, 13, 11 et 8, 10, 14, 12 appartiennent à deux plans parallèles au plan P et distants de ce plan d'une quantité *m′*-7 = *m′*-8, égale au demi-côté du carré inscrit dans le cercle teinté de la figure **3**.

On remarquera encore, sur la figure **7**, que les points B′,7, O′,12,H′ sont en ligne droite, ce qui provient de ce qu'ils sont situés sur l'une des diagonales du cube.

Pour la même raison, les points 8 et 11 appartiennent à la diagonale D′F′.

Les points 10 et 13 sont situés sur la diagonale C′E′, et les points 9 et 14 sur la diagonale A′G′.

Toutes ces lignes n'ont pas été conservées, mais en les traçant au crayon, ou simplement en appliquant la règle, on pourra s'assurer que les opérations ont été bien faites.

Enfin, les points 1, 2, 3, 4, 5 et 6 sont situés chacun au centre de l'une des faces du cube, et pourraient par conséquent être déterminés ou vérifiés en construisant les diago-

nales de cette face sur les figures **4** et **7**. Ainsi le point 3 de la figure **4** sera l'intersection des deux diagonales du parallélogramme ABFE, et le point 2 sera déterminé par les diagonales du parallélogramme HGFE, de sorte que les huit points 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 et 14, par chacun desquels passent trois ellipses, appartiennent aux diagonales du cube, et les six points 1, 2, 3, 4, 5, 6, par lesquels ne passent que deux ellipses, sont situés sur les diagonales des faces.

Toutes ces lignes, qui n'ont pas été conservées, sont tangentes aux ellipses correspondantes, et peuvent contribuer par conséquent à l'exactitude de leur construction.

586. Ainsi, indépendamment de tous les points que l'on pourra obtenir par la méthode des diamètres conjugués, on aura pour chaque ellipse six points de vérification et huit tangentes, savoir : les quatre côtés du parallélogramme conjugué formé par les arêtes opposées du cube, et par les droites qui joignent deux à deux les extrémités de ces arêtes ; puis les quatre génératrices qui limitent les projections des deux cylindres dont l'ellipse cherchée est l'intersection.

587. La figure **6** est la perspective du volume compris entre les cylindres M et N, et la figure **5** représente le volume compris entre les trois cylindres.

Les parties désignées sur ces deux figures par la lettre *m* appartiennent à la surface du cylindre M ; les parties désignées par *n* appartiennent au cylindre N ; enfin, les lettres *v* indiquent les parties qui appartiennent au cylindre V.

CHAPITRE III.

Surfaces coniques.

588. Définitions. On nomme, en général, surface conique, **pl. 60**, celle qui est engendrée par une ligne droite, assujettie dans son mouvement à passer toujours par un point que l'on nomme le *sommet* du cône.

La droite mobile se nomme la *génératrice* du cône ; on suppose ordinairement qu'elle doit s'appuyer sur une courbe que l'on nomme *directrice*.

Le cône diffère donc du cylindre, en cela que le parallélisme des génératrices est remplacé par cette condition que toutes ces droites doivent passer par un même point.

589. Si le sommet du cône s'éloignait jusqu'à l'infini, les génératrices deviendraient parallèles, et la surface du cône se changerait en un cylindre.

Si on augmentait le rayon de courbure de la directrice, la surface du cône s'aplanirait, et lorsque la directrice deviendrait une ligne droite, le cône serait un plan.

Ces propriétés permettent de regarder le cylindre comme un cône dont le sommet serait à l'infini, et le plan comme un cône dont la directrice serait droite.

590. Si la directrice était une courbe infinie, le cône serait lui-même infini dans ses deux dimensions. Mais si la directrice est une courbe fermée, le cône ne sera infini que dans le sens de ses génératrices.

591. Quoique ces lignes doivent passer par le sommet, il

ne faut cependant pas les considérer comme terminées à ce point. Ainsi, pendant que la génératrice engendrera la surface d'un cône, le prolongement de cette droite engendrera une seconde surface de cône opposé au premier par le sommet. Cependant, l'usage n'est pas de regarder ces deux surfaces comme appartenant à deux cônes différents ; et parce qu'elles sont engendrées par la même droite, on les considère comme composant la surface d'un seul cône, dont elles forment ce que l'on appelle les deux *nappes*.

592. Les considérations qui précèdent s'appliquent à tous les cônes, mais il existe dans certains cas particuliers que l'on rencontre souvent dans la pratique des relations sur lesquelles j'appellerai l'attention du lecteur. Ainsi, par exemple, lorsqu'un cône aura pour directrice une courbe du second degré, le cône sera lui-même du *second degré*.

Si la directrice est une ellipse, le cône sera *elliptique*.

Si la directrice est un cercle, et que le sommet soit sur la droite passant par le centre et perpendiculaire au plan du cercle, le cône sera *circulaire*. La droite qui joint le centre du cercle avec le sommet se nomme, dans ce cas, *axe du cône*.

On peut dire encore que le cône circulaire est engendré par une droite qui tourne autour d'une seconde droite immobile avec laquelle elle fait toujours le même angle. Si cet angle augmente, le cône devient plus obtus, et si la génératrice faisait un angle droit avec l'axe, le cône se changerait en un plan.

593. *Projection du cône.* Soit, **fig. 308**, un cône ayant pour sommet le point *ss'* et pour directrice la courbe 5-6, on prendra sur cette ligne autant de points que l'on voudra, puis on fera passer une génératrice par chacun de ces points et par le sommet du cône.

594. Pour construire les *traces* du cône, on prolongera les génératrices jusqu'aux plans de projection. Ainsi, la courbe 1'-5' sera la trace horizontale, et la courbe 1''-6'' sera la trace verticale du cône ; le point 5 suivant lequel

la courbe directrice perce le plan horizontal doit se trouver sur la trace horizontale du cône.

595. Pour exprimer qu'un point mm' appartient à la surface du cône, il suffira de placer ce point sur l'une des génératrices.

En opérant de même pour tous les points d'une courbe, on exprimera que cette ligne appartient à la surface du cône.

596. On peut prendre pour directrice d'un cône une ligne quelconque qui serait coupée par toutes les génératrices. Mais pour simplifier le travail graphique, on prend souvent pour directrice une courbe plane parallèle à l'un des plans de projection ou située dans ce plan.

Si nous concevons plusieurs cônes ayant le même sommet, et pour directrices les lignes v-3′-u, 1′-3′-5′, z-3′-x qui se touchent au point 3′, tous ces cônes se toucheront suivant la génératrice commune s-3′.

La droite $p'q'$ qui touche au point 3′ les trois courbes vu, 1′-5′, zx sera la trace horizontale d'un plan tangent aux trois cônes, suivant la génératrice s-3′.

597. On peut supposer ici, comme pour le cylindre (450), que l'on a fait tourner le plan coupant spq autour de la droite s-3′ jusqu'à ce que deux *génératrices de section* soient réunies en une seule qui devient alors la *génératrice de tangence.*

598. Si la directrice du cône est une courbe fermée, les projections de ce cône seront contenues entre certaines limites que nous allons déterminer.

Supposons, par exemple, **fig. 309**, un cône qui aurait pour directrice la courbe 1-2-6-3-4-5 située dans le plan horizontal, les deux tangentes s-1, s-3 seront les traces de deux plans tangents verticaux entre lesquels toutes les génératrices seront nécessairement comprises, car il est évident que la directrice ne pourrait pas être rencontrée par une droite dont la projection serait au dehors de l'angle 1-s-3 ; on prendra donc les deux tangentes s-1, s-3 pour limites de la projection horizontale du cône. Par la même raison, les deux

droites s'-2', s'-4' tangentes à la trace verticale du cône seront prises pour limites de la projection verticale.

599. Il est essentiel de construire avec une grande précision, les quatre points de tangence 1, 2, 3, 4.

Ces points déterminent les parties vues et cachées sur les deux projections du cône.

Ainsi, toute génératrice qui aurait son pied sur l'arc 1-2 sera évidemment vue sur la projection horizontale, tandis que sur la projection verticale elle sera cachée.

Toute génératrice qui aurait son pied sur l'arc 3-4 serait, au contraire, cachée sur la projection horizontale, tandis que sur la projection verticale elle serait vue.

Les génératrices qui auraient leurs pieds sur l'arc 2-6 seront vues sur les deux projections. Enfin, celles qui auraient leurs pieds sur l'arc 1-4 seront cachées sur les deux projections.

600. Les droites 6-x, 5-x sont les traces horizontales de deux plans tangents qui se coupent suivant la ligne s-x qui contient le sommet du cône.

Les droites z-5'', z-6'' sont les traces verticales des mêmes plans tangents ; on remarquera que ces dernières lignes sont tangentes à la trace verticale du cône.

Le plan (z-5'', x-5) touche le cône suivant la génératrice s-5, s'-5', et le plan (z-6'', x-6) le touche suivant la génératrice s-6, s'-6'.

601. *Développement de la surface du cône.* Dans les applications on développe ordinairement la surface du cône en opérant comme pour une pyramide oblique qui aurait un grand nombre de faces (288). Ainsi, en prenant sur la trace du cône des points assez rapprochés, on pourra, sans erreur sensible, remplacer par un triangle plan la petite portion de surface conique comprise entre deux points consécutifs de la trace et les génératrices correspondantes. Tous ces triangles, construits dans leur véritable grandeur et placés à côté les uns des autres, ont formé le développement du cône projeté, **fig. 306.**

Pour obtenir les génératrices dans leur véritable grandeur, on les a fait tourner autour de la verticale projetante du sommet jusqu'à ce qu'elles soient parallèles au plan vertical de projection.

602. Si aucune condition ne détermine la position des génératrices, on pourra simplifier le travail en choisissant de préférence celles qui ont une projection verticale commune, ou qui, deux à deux, ont leurs pieds à égale distance de la verticale du sommet.

Il est facile de satisfaire en même temps à ces deux conditions ; ainsi, par exemple :

Les génératrices 1 et 15 ayant une projection verticale commune, on prendra le point 16 déterminé par la tangente perpendiculaire à la ligne AZ, et l'arc de cercle 16-2 déterminera le point 2 par lequel on élèvera une perpendiculaire qui donnera le point 14.

L'arc de cercle 15-3 déterminera le point 3 d'où on déduira le point 13 sur la perpendiculaire 3-13, etc.

603. Pour construire dans le développement un point *mm* appartenant à la surface du cône, on le rabattra en *m''* sur la génératrice correspondante, et de là en *m'''* dans le développement de la surface.

En recommençant cette opération pour tous les points d'une courbe quelconque qui serait située sur la surface du cône, on obtiendrait tous les points de cette courbe dans le développement.

604. Pour construire le développement d'un cône circulaire, **fig. 305**, on décrira le secteur *s-a''-a'''*, **fig. 307**, en prenant *s-a''* égal au côté *s'-a'* du cône, et faisant l'arc *a''-a'''* égal à la circonférence de la base *s-a*.

605. On peut obtenir beaucoup d'exactitude en opérant de la manière suivante. Soit x l'angle *a'' sa'''* du secteur, et désignons par y l'arc *a''-a'''* qui sert de mesure à l'angle x, par R le côté *s'-a'* du cône, et par r le rayon *sa* de la base : on doit avoir, en prenant l'angle droit pour unité :

$$x : 4 = y : 2\pi R.$$

Mais $y = 2\pi r$.

Substituant, on a $x\,4 : = 2\pi r : 2\pi R$.

Ou, enfin, $x : 4 = r : R$.

Donc $x = \frac{4r}{R}$,

ce qui donne l'angle du secteur. Supposons, par exemple,

$$R = 12 \quad \text{et} \quad r = 5.$$

Nous aurons :

$$x = \frac{4r}{R} = \frac{4 \times 5}{12} = \frac{20}{12} = 1 + \frac{8}{12} = 1 + \frac{2}{3} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ.$$

Ainsi, en décrivant un secteur de 150 degrés avec un rayon de 12 mètres, on aurait le développement d'un cône dont le rayon de la base serait 5, et le côté 12.

Quand le secteur sera construit, on pourra placer sur l'arc $a''a'''$ les pieds des génératrices qui seraient utiles pour résoudre la question proposée.

606. *Plan passant par le sommet du cône.* Cette relation est la plus simple qui puisse résulter de la combinaison d'un plan avec un cône.

Un plan contiendra le sommet du cône toutes les fois qu'il contiendra une droite quelconque passant par ce point.

607. Pour construire, **fig. 310, pl. 61,** par un point donné mm', des plans passant par le sommet du cône *sab*, on tracera la droite sn, $s'n'$, et tous les plans qui contiendront cette droite satisferont à la condition demandée.

On devra distinguer 1° les plans tels que *snp* qui passent par le sommet du cône sans rencontrer la surface ;

2° Le plan snp' qui touche la surface du cône suivant la génératrice sa ;

3° Enfin, le plan snp'' qui touche le cône suivant la génératrice sa' et le coupe suivant sa''.

608. En général, le nombre des lignes de section ou de

tangence dépendra du nombre de points suivant lesquels la trace du cône sera touchée ou coupée par la trace du plan.

609 Plans tangents au cône. *Construire un plan tangent à un cône par un point pris sur la surface de ce cône.*

Soient, **fig. 311**, le cône AA′ et le point *mm′* situé sur la surface, on construira d'abord la génératrice *sm*, *s′m′*; puis par le point *b*, où cette génératrice rencontre le plan horizontal, on mènera une tangente à la trace horizontale du cône. Cette ligne sera la trace horizontale du plan tangent, dont la trace verticale se déterminera facilement, puisque ce plan doit contenir la ligne *mb*, *m′b′* (66).

610. *Normale.* Les droites *mn*, *m′n′*, perpendiculaires sur les traces du plan *p*, seront les deux projections de la normale. Tout plan qui contiendrait la droite *mn*, *m′n′* serait un *plan normal* au point *m*, *m′*.

611. *Construire un plan tangent à un cône par un point pris en dehors de la surface.*

Soient, **fig. 312**, le cône AA′ et le point *mm′*, on fera passer par ce point et le sommet du cône la droite *sm*, *s′m′*, et par le point *b*, où cette droite perce le plan horizontal, on construira deux tangentes à la trace horizontale du cône ; ces deux lignes seront les traces horizontales de deux plans tangents. Les traces verticales de ces plans devront passer par la trace verticale de la droite *sm*, *s′m′*.

Si l'on n'avait pas ce point sur l'épure, on y suppléerait facilement en assujettissant les plans cherchés à contenir le sommet du cône ou tout autre point de la ligne *sm*, *s′m′*.

On devrait aussi se rappeler que chaque plan tangent doit contenir l'une des deux droites (*sc*, *s′c′*) (*sd*, *s′d′*) qui sont les génératrices de tangence.

612. *Construire un plan tangent à un cône, parallèlement à une droite donnée.*

Soient, **fig. 313**, le cône A, A′ et la droite donnée ′,*aa* on

construira par le sommet du cône la droite *sb*, *s'b'* parallèle à la ligne donnée *aa'*. Il ne restera plus qu'à faire passer par la droite *sb*, *s'b'* deux plans tangents au cône ; ce qui se fera comme dans l'exemple précédent. On conçoit, en effet, que les deux lignes *aa'*, *bb'*, étant parallèles, tout plan contenant la seconde de ces deux droites sera parallèle à la première. Les droites (*sd*, *s'd'*) (*sc*, *s'c'*) sont les génératrices de tangence.

613. *Intersection de la surface du cône par une ligne droite*. Soit *aa'*, **fig. 314**, la droite donnée ; on prendra sur cette ligne un point quelconque *mm'*, on joindra ce point avec le sommet du cône par la droite *sm*, *s'm'*, et l'on fera passer un plan par les deux droites (*am*, *a'm'*) (*sm*, *s'm'*).

Ce plan passant par le sommet du cône coupera la surface suivant les deux génératrices (*sb*, *s'b'*), et les intersections de ces deux lignes par la droite donnée (*am*, *a'm'*) seront les points demandés.

La portion (*vu*, *v'u'*) de la ligne donnée est dans l'intérieur du cône.

614. Si la trace horizontale *pq* du plan auxiliaire ne rencontrait pas la trace du cône, on en conclurait que la ligne donnée ne rencontre pas le cône ; et si la trace *pq* touchait la trace du cône, cela indiquerait que la ligne donnée touche le cône.

Le point de tangence serait déterminé par l'intersection de la ligne donnée avec la génératrice suivant laquelle le plan auxiliaire toucherait le cône.

615. Sections planes du cône. Supposons, **pl. 62**, qu'une surface conique soit déterminée par sa projection horizontale, **fig. 7**, et par sa projection sur le plan vertical A'Z', **fig. 9** ; on veut obtenir la section de ce cône par le plan P, dont on connaît les traces.

On sait que la courbe de section d'un cône par un plan contient tous les points suivant lesquels ce plan coupe les génératrices du cône. Il suffira donc, pour obtenir chacun de ces points, de faire la construction que nous avons donnée au

n° 87, et qui a pour but d'obtenir le point de section d'une ligne droite par un plan.

Ainsi, par exemple, le plan P_1 qui contient la génératrice Sa coupe le plan donné P suivant la droite vu, dont la rencontre avec la droite Sa détermine le point m, qui appartient à la projection horizontale de la courbe demandée.

Le plan P_1 étant tangent au cône, la droite vu doit être tangente à la courbe de section M.

616. On pourrait, en opérant comme nous venons de le faire, déterminer les points de section de toutes les génératrices du cône par le plan P. Mais ici, comme dans toutes les questions de même nature (521), on simplifiera les opérations et l'on augmentera l'exactitude, en faisant usage, **fig. 5**, d'un plan auxiliaire de projection A″Z″, vertical et perpendiculaire au plan coupant P.

Par suite de cette disposition d'épure, la courbe de section M″ se projettera par une ligne droite zx ; de sorte que pour obtenir la projection horizontale de cette ligne, il suffira d'abaisser des perpendiculaires à A″Z″, par les points suivant lesquels la droite zx est rencontrée par les projections des génératrices du cône.

La projection M′ de la courbe sur le premier plan vertical de projection se déduira de la projection horizontale M, en élevant, par chaque point de cette projection, une perpendiculaire à A′Z′.

On pourra vérifier le résultat, en exprimant :

1° Que chacun des points obtenus est situé dans le plan P ;

2° Que ces points sont bien exactement à la même hauteur sur les deux projections verticales A′Z′, **fig. 9**, et A″Z″, **fig. 5**.

617. La figure **8** est la courbe de section M″, rabattue sur le plan horizontal P_3 en tournant autour de l'horizontale projetante du point B ; on suppose, qu'avant d'effectuer ce rabattement, on a fait avancer le plan P parallèlement à lui-même jusqu'à ce qu'il soit venu prendre la position P_2.

Les opérations pourront facilement être liées en prenant

la charnière de rabattement sur la bissectrice CB de l'angle A'CA'' que font entre elles les traces A'Z' et A''Z'' des deux plans verticaux de projections.

618. La figure **2** est le développement du cône que l'on construira en opérant comme nous l'avons dit au n° 601, la courbe de section est représentée sur ce développement par la ligne $KM^{iv}H$.

619. *Tangentes*. Nous avons déjà dit bien des fois combien la construction des tangentes augmente l'exactitude des courbes en déterminant leur direction dans le voisinage des points de tangence. C'est pourquoi on devra commencer par construire les points situés sur les génératrices limites des projections horizontale et verticale du cône.

On fera bien également de construire quelques autres tangentes au crayon, que l'on pourra effacer lorsque la courbe sera tracée avec toute l'exactitude nécessaire. On ne doit pas oublier que ces tangentes, ayant pour but de faciliter le tracé de la courbe, doivent être construites avant cette ligne ; et pour cela on devra se rappeler ce que nous avons dit au n° 519.

Ainsi, pour obtenir la tangence en un point n de la courbe de section, **fig. 7**, on tracera d'abord la génératrice Sc, qui contient le point donné ; la tangente au pied c de cette génératrice sera la trace horizontale du plan tangent P_4 et la droite DT, intersection du plan tangent P_4 et du plan coupant P, sera la tangente au point n de la courbe. La projection de cette tangente, sur le plan vertical A'Z', sera D'T', et la projection D''T'' de la même droite sur le plan vertical A''Z'' coïncide avec la trace P du plan coupant.

Le point D, projeté en D''' et rabattu en D'', détermine la tangente D'''T''' au point n''' de la figure **8**, et pour obtenir cette même tangente $D^{iv}T^{iv}$, sur le développement, **fig. 2**, il suffira de construire le triangle $n^{iv}c^{iv}D^{iv}$, dont on connaît les trois côtés ; savoir, $n^{iv}c^{iv}$ déterminé en vraie grandeur sur le développement du cône, **fig. 2**, $c^{iv}D^{iv}$ égal à la trace cD du plan tangent, **fig. 7**, et $n^{iv}D^{iv}$ égal à la tangente $n'''D'''$ rabattue, **fig. 8**.

620. Dans les applications, on évite presque toujours la projection sur le plan vertical A'Z'.

En effet, si l'on connaît la trace horizontale directrice du cône, la hauteur du sommet au dessus du plan qui contient cette courbe, la trace horizontale du plan coupant et la hauteur d'un point quelconque de ce plan ; cela suffira pour établir l'épure, que l'on disposera comme on le voit, **fig. 10**, où l'on n'a conservé les notations que pour le point *n*, par lequel on a construit une tangente à la courbe.

621. Si le plan coupant est horizontal, la courbe de section sera semblable à la trace horizontale du cône ; et, dans ce cas, il suffira de déterminer un point de la courbe demandée. En effet, lorsque l'on connaîtra, **fig. 1**, le point *m* homologue du point M, on tracera le côté *mu* parallèle à MU, ce qui déterminera le point *u* sur la génératrice SU du cône : puis, il ne restera plus qu'à construire les triangles *mum*, semblables chacun à chacun aux triangles MUN. Ce qui déterminera autant de points que l'on voudra de la courbe demandée.

Toutes les droites N*n* doivent concourir au point S.

Cette remarque est fort utile, parce qu'il est souvent nécessaire de couper un cône par une suite de plans horizontaux, comme on le voit, **fig. 3**. Dans ce cas, une seule génératrice, S'M', percera les plans P_1 P_2 P_3 etc., suivant des points *m'*, *m'*, *m'* qui, étant projetés sur le plan horizontal, détermineront sur chaque courbe un point *m* suffisant pour la construire.

622. Si le système de plans parallèles, par lesquels on veut couper le cône, était incliné par rapport au plan horizontal, on disposerait l'épure comme cela est indiqué sur la figure 4 ; puis, après avoir déterminé la courbe MN, M'N', en opérant comme nous l'avons dit aux numéros 616, 620, il ne resterait plus qu'à construire toutes les courbes semblables, *mn*, pour chacune desquelles on obtiendrait le point *m*, en construisant la génératrice S'C'.

623. Si l'une des sections MN, **fig. 12**, est une ellipse,

toutes les sections parallèles seront des ellipses semblables à MN, et, dans ce cas, on projettera les trois droites S'O', S'M', S'N'. La première S'O' de ces trois droites déterminera les centres *o* de toutes les ellipses ; la droite S'M' déterminera les extrémités *m* de tous les grands axes, et la droite S'N' donnera les extrémités *n* des petits axes.

Enfin, on déterminera aussi facilement les points *u* et *v*, suivant lesquels ces ellipses sont touchées par les deux génératrices SU et SV, qui forment les limites de la projection horizontale du cône.

624. Il arrive souvent, **fig. 11**, que le sommet du cône ne peut pas être projeté sur l'épure. Dans ce cas, on peut presque toujours le remplacer par une section *mn*, semblable et parallèle à la directrice MN. Les droites passant par les points homologues de ces deux figures seront les projections horizontales des génératrices du cône. On construira les projections de ces lignes sur un plan vertical A'Z', perpendiculaire au plan coupant P. Puis, en opérant comme nous l'avons dit aux nos 616 et 617, il sera facile de projeter et de rabattre la courbe de section K, K', et K''.

625. Tout ce que nous avons dit au numéro 529 pour la courbe de section d'un cylindre par un plan s'appliquerait également à la section plane de toute autre surface.

Ainsi la figure **2**, planche **63**, contient les opérations nécessaires pour déterminer le point le plus *élevé* et le point le plus *bas* de la courbe de section d'un cône par le plan P.

Le tout se réduit évidemment à construire les deux plans tangents P_1 et P_2 dont les traces horizontales sont parallèles à la trace horizontale du plan P.

626. Sur la figure **1**, on a déterminé le point le plus *près* et le plus *éloigné* d'un plan donné P_7 **fig. 4**.

Pour cela on a construit, **fig. 1** :

1° Le plan P_8 parallèle au plan donné P_7 **fig. 4** ;

2° La droite *uu'*, intersection des plans P et P_8 ;

3° Les deux plans tangents P_3 et P_4 parallèles à la droite *uu'* ;

4° Les deux tangentes T_3 et T_4 suivant lesquelles le plan P est coupé par les plans tangents P_3 et P_4;

5° Enfin les deux génératrices suivant lesquelles le cône est touché par les mêmes plans.

627. Sur la figure **3**, on a déterminé le point le plus à droite et celui qui est le plus à gauche, ou, ce qui revient au même, le point le plus *près* et le plus *éloigné* d'un plan quelconque P_9 perpendiculaire à la ligne AZ.

Ainsi on a construit :

1° Le plan P_{10} parallèle au plan P_9 donné ;

2° Les deux plans P et P_{10} se coupent suivant la droite *uu* rabattue en u'' sur le plan vertical de projection ;

3° La droite $s'v''$ parallèle à u'' est l'intersection des deux plans tangents demandés ;

4° La droite $s'v''$ ramenée dans le plan P_{10} détermine le point v, et par suite les traces horizontales P_5 et P_6 des deux plans tangents ;

5° Les deux tangentes T_5 et T_6 doivent être perpendiculaires à la ligne AZ ;

6° Enfin ces deux tangentes détermineront les deux points cherchés 5 et 6 sur les génératrices suivant lesquelles le cône est touché par les plans P_5 et P_6.

628. Cône elliptique. Le cône elliptique est celui qui a pour directrice une ellipse. Or, *lorsqu'un plan est dirigé de manière à couper toutes les génératrices de la même nappe d'un cône elliptique, la courbe de section est une ellipse.*

En effet, on sait, **fig. 4, pl. 64**, que dans toute ellipse AU, rapportée à deux diamètres conjugués quelconques, on a toujours :

$$AN \times NU : AN' \times N'U = \overline{MN}^2 : \overline{M'N'}^2.$$

C'est-à-dire que les rectangles formés par les deux segments d'un diamètre sont entre eux comme les quarrés des ordonnées correspondantes.

La relation que nous venons d'énoncer est également vraie

pour deux ellipses semblables, et quels que soient les pieds des ordonnées ; car si les deux ellipses AU et *au*, **fig. 4** et **5**, sont semblables on aura

$$AN : an = MN : mn,$$
$$NU : nu = MN : mn;$$

multipliant, on obtient

$$AN \times NU : an \times nu = \overline{MN}^2 : \overline{mn}^2.$$

Nous admettrons la réciproque qui est démontrée dans tous les traités d'Algèbre appliquée ; c'est-à-dire que, *si les rectangles formés par les deux segments d'un diamètre sont entre eux comme les quarrés des ordonnées correspondantes, la courbe sera une ellipse.*

D'après cela, supposons, **fig. 6**, un cône droit ou incliné, qui aurait pour directrice l'ellipse RKFH.

Concevons les deux sections IBMC, I'B'M'C', parallèles et, par conséquent, semblables à la directrice RKHF. Quelle que soit la direction du plan coupant P, les droites IM, I'M' seront parallèles entre elles.

Concevons RF parallèle aux droites IM, I'M', et menons le plan SKH, de manière que le diamètre KH soit le conjugué de RF. Il en résultera que les cordes IM et I'M' seront conjuguées avec les diamètres BC et B'C', et que la droite AU sera l'intersection du plan SKH par le plan P qui contient la courbe de section AMM'UI'I.

Or les triangles semblables ABN, AB'N' donneront

$$AN : AN' = BN : B'N'; \qquad (1)$$

les triangles semblables UCN, UC'N' donneront

$$NU : N'U = NC : N'C'; \qquad (2)$$

multipliant l'équation (1) par (2), on aura

$$AN \times NU : AN' \times N'U = BN \times NC : B'N' \times N'C'. \quad (3)$$

Mais les deux courbes IBMC et I'B'M'C' étant semblables à la directrice RKFH, sont des ellipses; et, par le principe énoncé au n° 628, on a

$$BN \times NC : B'N' \times N'C' = \overline{MN}^2 : \overline{M'N'}^2; \qquad (4)$$

multipliant (3) par (4) et réduisant, on obtient

$$AN \times NU : AN' \times N'U = \overline{MN}^2 : \overline{M'N'}^2; \qquad (5)$$

donc, puisque les rectangles formés par deux segments quelconques du diamètre AU sont entre eux comme les quarrés des ordonnées correspondantes MN et M'N', la courbe AMM'UI'I est une *ellipse* (628).

629. Tout ce que nous venons de dire est applicable au cylindre elliptique, **fig. 7**; la coïncidence des lettres sur les deux figures **6** et **7** nous dispensera de répéter la démonstration.

630. Les cordes MI, M'I', **fig. 6**, étant conjuguées avec le diamètre AU, la tangente AT sera parallèle à ces cordes; mais si l'on fait tourner le plan coupant P autour de la tangente AT, de manière que le point U s'éloigne du sommet S du cône, il y aura un moment où le point U sera situé à l'infini; alors le plan P ne rencontrera plus la génératrice SH qui, dans ce cas, sera parallèle au diamètre AU, et la courbe ne sera plus fermée. Or, dans ce cas, **fig. 12**, on aura $NC = N'C'$.

L'équation (4) deviendra

$$\overline{MN}^2 : \overline{M'N'}^2 = BN : B'N'; \qquad (6)$$

mais les triangles semblables, ANB, AN'B', donnent la proportion

$$BN : B'N' = AN : AN'; \qquad (7)$$

multipliant (6) par (7) et réduisant, on obtient

$$\overline{MN}^2 : \overline{M'N'}^2 = AN : AN'; \qquad (8)$$

d'où l'on doit conclure que la courbe de section est une *parabole,* puisque l'on sait que dans toute parabole rapportée à des axes conjugués, **fig. 13**, *les quarrés de deux ordonnées quelconques,* MN, M'N', sont entre eux comme les abscisses correspondantes, AN, AN' (*Algèb. appl.*).

631. Si l'on continuait à faire tourner le plan coupant autour de la tangente AT, **fig. 12** et **6**, le point U se porterait

sur SV prolongement de SH, le plan P couperait alors les deux nappes du cône et la courbe de section serait une hyperbole ; ce que l'on pourrait démontrer en raisonnant comme nous l'avons fait pour l'ellipse figure **6**.

632. Pour résumer, supposons que le triangle SHK, **fig. 8**, soit la projection d'un cône elliptique quelconque, dont la seconde nappe serait SH'K'. Si l'on coupe ce cône par des plans P P_1 ou P_2 on obtiendra une *ellipse* lorsque l'angle KAU sera plus grand que ASU ; on aura une *parabole* quand l'angle KAU' sera égal à ASU. Enfin, la courbe de section sera une *hyperbole* lorsque l'angle KAU'' sera plus petit que ASU ; parce que, dans ce cas, le plan *coupera les deux nappes du cône*.

Les projections et les rabattements des trois courbes pourront être obtenus en opérant comme nous l'avons dit au n° 131. Ainsi, les figures **1**, **2** et **3** contiennent les opérations et la disposition d'épure la plus convenable pour obtenir une section elliptique du cône ; les figures **9**, **10** et **11** contiennent les projections et le rabattement de la section parabolique, et sur les figures **14**, **15** et **16**, on s'est proposé de construire les projections et le rabattement d'une section hyperbolique.

Pour déterminer le point *m* sur la projection horizontale de la parabole, **fig. 10**, on rabattra la génératrice S'*a* en S'*a*'', le point *m*' de la figure **9** viendra se projeter en *m*'', d'où on déduira *m*''', qui, ramené à sa place, donne *m* pour le point demandé.

On agira de même pour obtenir le point *n*, et les points situés sur les génératrices dont les projections seraient coupées trop obliquement par les perpendiculaires à la ligne AZ.

633. Il peut être utile, dans certains cas, de construire les asymptotes de l'hyperbole. On devra se rappeler alors que ces droites sont les limites des tangentes à la courbe, c'est-à-dire qu'une tangente qui tournerait autour de l'hyperbole, en prenant toutes les directions possibles, se confondrait avec l'une des asymptotes au moment ou le point de tangence serait arrivé à l'infini (386).

La question sera donc réduite à faire passer par le centre de l'hyperbole deux tangentes à cette courbe.

Voici l'ordre des opérations :

1° Les droites $a'a$, $a'a$ perpendiculaires à la ligne AZ, détermineront sur les génératrices SK et SH les deux points a, a, extrémités du diamètre aa.

2° Le point cc', milieu du diamètre aa, sera le centre de l'hyperbole.

3° La droite Scu, $S'c'u'$ sera l'intersection de deux plans tangents au cône et passant par le point cc' (611).

4° Les droites umP_1 tangentes à la trace du cône, seront les traces des deux plans tangents P_1P_1

5° Enfin les droites cn, cn, intersections de ces deux plans tangents avec le plan coupant P seront les asymptotes demandées. Car elles sont tangentes à l'hyperbole, puisqu'elles sont les intersections du plan coupant avec les plans tangents qui contiennent le point cc' ; et puisqu'elles passent par le centre de l'hyperbole, elles coïncideront avec les asymptotes de cette courbe.

634. Il faut ajouter, comme cas particulier des courbes précédentes, les sections du cône par un plan qui contiendrait le sommet.

Si nous supposons, par exemple, que le plan P_3 **fig. 8**, tourne autour de l'horizontale projetante du point SS', il faudra distinguer trois cas :

1° Si l'angle KSP_3 est plus grand que KSH, la section sera un *point* que l'on pourra considérer comme une ellipse dont les axes seraient égaux à *zéro*.

2° Si l'angle KSP_4 était égal à KSH, le plan toucherait le cône suivant la génératrice SH, qui remplacerait alors la courbe de section, que l'on pourrait considérer comme une parabole dont les deux branches se seraient rapprochées.

3° Enfin, si l'angle KSP_5 était plus petit que KSH, le plan couperait le cône suivant deux génératrices que l'on pourrait considérer comme une hyperbole coïncidant avec ses asymptotes, parce que la distance du centre au sommet de la courbe serait égale à zéro.

635. Cette dernière considération donne un deuxième moyen de construire les asymptotes de l'hyperbole.

En effet, admettons, ce qui est démontré dans tous les traités de Géométrie, que *si on coupe un cône par un des plans parallèles, toutes les courbes de section seront semblables.*

Il en résulte que si, par le sommet du cône projeté, **fig. 15** et **16**, nous faisons passer un plan P_2 parallèle au plan P, les deux génératrices S*m* pourront être considérées comme formant une hyperbole *semblable* à celle qui résulte de la section du cône par le plan P, ces deux courbes ne différant, comme nous l'avons dit, que par la distance du centre au sommet.

Or, la section par le plan P_2 donne l'angle que les asymptotes font entre elles, et puisque l'on connaît le centre *cc'* de l'hyperbole qui résulte de la section par le plan P, il sera facile de construire les asymptotes *cn* de cette dernière courbe.

636. Section elliptique du cône. Parmi les trois courbes que l'on obtient en coupant un cône du deuxième degré par un plan, la plus importante est l'ellipse, que l'on retrouve à chaque pas dans les applications de la géométrie descriptive. Mais, de toutes les manières de construire une ellipse, la plus simple et la plus exacte est la construction par les axes (396) ou au moins par les diamètres conjugués (395).

Or les deux tangentes *m''m'''* et *n'' n'''*, **fig. 3**, étant parallèles, la droite *m''n''*, qui joint les points de tangence, est un diamètre, et le point *o*, milieu de ce diamètre, sera le centre de l'ellipse. Par conséquent, si du point *o* comme centre on décrit l'arc de cercle *vu*, le milieu *c* de cet arc sera situé sur le grand axe, que l'on obtiendra en traçant la droite *o*K perpendiculaire sur la corde de l'arc *vu*.

Le moyen que nous venons d'indiquer ne réussit pas toujours parce que l'arc de cercle coupe souvent la courbe suivant des angles trop aigus, et que d'ailleurs l'exactitude du résultat dépend de la courbe elle-même, qui n'est pas toujours déterminée avec une précision suffisante. Il serait donc très-utile que l'on pût obtenir les axes ou au moins les diamètres conjugués avant la construction de l'ellipse.

637. Supposons, **pl. 65**, qu'un cône elliptique soit donné; par ses projections horizontale et verticale, **fig. 7** et **2**, on veut obtenir la section de ce cône par le plan P. On déterminera d'abord le point le plus élevé *m* et le point le plus bas *n*, en construisant les deux plans tangents dont les traces horizontales P_1 et P_2 sont parallèles à la trace horizontale du plan P. Les tangentes *zx* et *vu* seront parallèles à la trace horizontale du plan P et formeront deux côtés du parallélogramme conjugué *vuzx*. La droite *mn*, qui joint les deux points de tangence *m* et *n*, sera un diamètre de l'ellipse, et le conjugué *ac* de ce diamètre sera parallèle aux tangentes *zx* et *vu*. Il ne reste donc plus qu'à déterminer les deux points *a* et *c*.

Pour y parvenir, on tracera la droite SO, S'O', dont on construira la trace horizontale O, qu'il ne faut pas confondre avec le centre D de l'ellipse qui forme la trace horizontale du cône. La corde AC, parallèle à *ac*, donnera les deux points A, C, et par suite, les génératrices SA et SC, dont les intersections avec la droite horizontale *ca* détermineront les extrémités *a* et *c* du diamètre *ac*, conjugué de *mn*.

J'ai indiqué sur l'épure quelques-unes des vérifications les plus remarquables. Ainsi :

1° Le parallélogramme conjugué *vuzx* est la section par le plan P de la pyramide quadrangulaire circonscrite au cône et qui aurait pour base le quadrilatère ZXUV formé par les tangentes aux points A, M, C, N de la base du cône.

2° Les droites *xu*, *mn*, *zv* et XU, MN, ZV se rencontrent deux à deux sur la trace horizontale du plan P.

3° Enfin, les droites XU, MN et ZV concourent en dehors du cadre, vers le point suivant lequel le plan horizontal de projection est percé par la droite SK, S'K' menée par le sommet du cône parallèlement à la droite *mn*, et par conséquent, aux côtés *xu* et *zv* du parallélogramme conjugué.

Si l'on débarrasse l'épure de toutes les lignes de vérification qui ne sont conservées ici que comme études, le travail graphique devient excessivement simple.

Lorsqu'on aura obtenu les diamètres conjugués *ac*, *mn*, on pourra construire l'ellipse, en opérant comme nous l'avons

dit au n° 395, ou, si l'on préfère, on déterminera les axes par le moyen indiqué au n° 396.

Ce que nous venons de dire est également applicable à la section plane du cylindre elliptique projeté sur les figures **12** et **4**.

638. Cône circulaire. Les figures **1** et **13** contiennent les applications du principe précédent aux sections planes du cylindre et du cône circulaires, qui ne sont que des cas particuliers parmi les cônes et cylindres elliptiques. Mais il ne faut pas oublier que, dans la pratique, le cône et le cylindre circulaires sont employés bien plus souvent que les cylindres ou les cônes qui ont pour directrices d'autres courbes. C'est pourquoi je crois utile d'ajouter encore quelques développements aux études précédentes.

Soit, **fig. 6**, la perspective d'un cône circulaire coupé obliquement par un plan P. La courbe AMU étant la ligne de section, concevons deux sphères inscrites dans le cône et tangentes au plan P, l'une au point F et l'autre au point F'. La première sphère sera touchée par le cône, suivant le cercle KIH, et la seconde suivant le cercle BOC. Ces deux cercles seront parallèles et leurs plans P_1 et P_2 seront perpendiculaires à l'axe SK du cône.

Cela étant admis, concevons la génératrice SO, qui rencontre la courbe de section en un point M. Traçons MF, MF', et rappelons-nous que si, par un point extérieur, on mène deux tangentes à une sphère, les parties de ces tangentes comprises entre les points de tangence et le point de concours des deux tangentes seront égales. On aura donc

$$MF = MI,$$
$$MF' = MO\ ;$$

d'où, en ajoutant et transformant,

$$MF + MF' = MI + MO = IO,$$

quantité constante, quelle que soit la position occupée par le point M sur la courbe de section. Cette courbe AMU est donc une ellipse, puisqu'il existe dans son plan deux points

F et F′, tels que *la somme des distances de ces points à un point quelconque* M *de la courbe est une quantité constante;* propriété qui n'appartient qu'à l'ellipse et que l'on prend souvent pour sa définition. Le résultat que nous venons d'obtenir pouvait être prévu, puisque le cône circulaire n'est qu'un cas particulier parmi les cônes elliptiques; mais ce qu'il y a surtout de remarquable dans le cas actuel, c'est que les *foyers* de l'ellipse sont les points suivant lesquels les deux sphères sont touchées par le plan coupant P.

Si actuellement nous reprenons la quantité constante IO, nous aurons

$$IO = KB = HC = \frac{KB + HC}{2} = \frac{AK + AB + UH + UC}{2}$$

$$= \frac{AF + AF' + UF + UF'}{2} = \frac{AU + AU}{2} = AU\,;$$

d'où il résulte que

$$MF + MF' + AU,$$

ainsi la somme des distances MF + MF′ est égale au diamètre qui contient les deux foyers : ce qui complète la définition de l'ellipse (357).

639. Si le plan coupant est dirigé de manière à rencontrer les deux nappes du cône, **fig. 3**, et si l'on conçoit les deux sphères inscrites qui touchent ce plan P aux points F et F′, on aura encore

$$MF = MI,$$
$$MF' = MO\,;$$

d'où, retranchant et transformant

$$MF - MF' = MI - MO = IO = KB = HC = \frac{KB + HC}{2} =$$

$$= \frac{AB - AK + UH - UC}{2} = \frac{AF' - AF + UF - UF'}{2} =$$

$$= \frac{AU + AU}{2} = AU,$$

d'où $$MF' = MF' = AU,$$

par conséquent, la courbe de section est une hyperbole dont l'axe transverse est égal à AU.

640. Enfin, supposons que le plan coupant, **fig. 5**, soit parallèle à l'une des génératrices SC du cône ; concevons la sphère inscrite qui touche le plan P au plan F, et traçons les deux cercles parallèles KH et BC, on aura :

$$MF = MI = KB = KA + AB ; \qquad (1)$$

mais la droite DU étant parallèle à SC, les triangles AKD, SHK seront semblables, et le second étant isocèle le premier le sera également, ce qui donnéra :

$$KA = AD ;$$

le triangle ABU sera isocèle et donnera :

$$AB = AU ;$$

d'où, en ajoutant

$$KA + AB = AD + AU ; \qquad (2)$$

mais nous avons trouvé (1)

$$MF = KA + AB ; \qquad (3$$

ajoutant et réduisant, on obtient :

$$MF = AD + AU = UD = MR.$$

Donc la courbe est une parabole puisque, pour l'un quelconque M de ses points, la distance MF au foyer F est égale à la distance MR du même point à une droite DR, que l'on nomme directrice (374) ; cette droite provient de l'intersection du plan coupant P avec le plan P_1 qui contient le cercle suivant lequel la surface du cône touche la sphère inscrite.

L'ellipse et l'hyperbole ont chacune deux directrices DR, **fig. 6** et **3**. Ces droites, comme pour la parabole, sont les intersections du plan coupant P et des plans P_1 et P_2 des cercles de contact du cône et des sphères inscrites.

Dans la parabole, l'une des directrices est située à l'infini et le triangle ADK, **fig. 5**, étant isocèle, on a :

$$AF = AK = AD.$$

Ce que nous avions déjà dit au n° 374.

641. Si le cône circulaire, **fig. 9** et **10**, est coupé par un plan P perpendiculaire au plan vertical de projection A'Z', la courbe de section se projettera sur ce plan par une ligne droite, et sur le plan horizontal par une ellipse dont il sera facile de déterminer les axes sans chercher d'abord les diamètres conjugués, comme nous l'avons fait au n° 637.

En effet, les deux points *a* et *c* seront les extrémités du grand axe dont le milieu *o'o* sera le centre de l'ellipse. On déterminera les extrémités du petit axe en décrivant la circonférence de la section circulaire que l'on obtient en coupant le cône par un plan horizontal P_1 mené par le centre *oo'* de l'ellipse de section.

La figure **8** est la courbe elle-même rabattue en tournant autour de la trace horizontale du plan P.

La droite *a'm*, bissectrice de l'angle S'*a'c'*, rencontrera l'axe du cône en un point *m*, qui sera le centre de la sphère inscrite, et la droite *m*F, perpendiculaire sur le plan P, déterminera en F l'un des foyers de la courbe de section. On pourra obtenir le second foyer en opérant de la même manière ou en faisant *c'*F' = *a'*F'. Ces foyers sont rabattus, **fig. 8**, avec l'ellipse *a''c''*.

Il est très-essentiel de remarquer que les foyers de la projection horizontale de l'ellipse de section ne sont pas sur les perpendiculaires abaissées par les foyers F et F' de la courbe *a'c'*, **fig. 9**.

642. Projection circulaire de l'ellipse. Si l'on décrit la demi-circonférence qui a pour diamètre la droite *a'c'* égale au grand axe de l'ellipse de section, si ensuite on fait la corde *c'*K, **fig. 9**, égale au petit axe *vu* de la même ellipse, le triangle *c'*K*a'* sera rectangle en K ; la corde *c'*K sera la projection de l'hypoténuse *a'c'* ; d'où il résulte que l'ellipse se projettera par un cercle sur tout plan P_2 qui serait perpendiculaire à la corde *a'*K, puisque, sur ce plan, la projection *c'k* du grand axe *a'c'* de l'ellipse sera égale au petit axe *vu* de la même courbe, **fig. 10**.

Cette opération nous sera souvent utile par la suite, car

toutes les fois que l'on devra couper un cône circulaire par une suite de plans parallèles, les ellipses que l'on obtiendra seront *semblables* entre elles et les projections elliptiques de toutes ces courbes seront remplacées par des cercles sur un plan quelconque de projection déterminé par les opérations précédentes. D'où il résulte que, pour la solution de certains problèmes, il sera quelquefois utile de remplacer le cercle par une ellipse, car il est évident qu'une ellipse projetée par un cercle sera plus simple, et par conséquent plus commode, qu'un cercle incliné dont la projection serait une ellipse.

643. Lorsqu'un cône circulaire, terminé par une base perpendiculaire à son axe, est projeté sur un plan parallèle à cet axe, la projection, **fig. 327, pl. 66**, est un triangle isocèle *scc*. La circonférence tangente aux droites *se*, *se*, est la projection d'une sphère inscrite et tangente à la surface du cône, suivant une circonférence de cercle qui a pour projection la droite *uu*.

Enfin, les deux droites parallèles *vv*, *vv* sont les limites de la projection d'un cylindre circulaire qui touche la sphère suivant la circonférence du grand cercle qui a pour projection la droite *zz*.

Les deux cercles *uu*, *zz*, situés tous deux sur la surface de la sphère, se coupent en un point x qui appartient à la surface du cône, puisque le cercle *uu*, suivant lequel la sphère est touchée par le cône, appartient tout entier à cette dernière surface.

Si nous concevons actuellement que le cylindre et le cône soient coupés par un même plan *pq*, les deux courbes de section seront deux ellipses qui, ayant un axe commun *aa* et un point commun x, coïncideront et ne feront, par conséquent, qu'une seule et même courbe.

Il en sera de même de la section du cylindre et du cône par un plan $p'q'$; d'où nous pouvons conclure que les diagonales du quadrilatère $aa'aa'$ sont les projections de deux ellipses situées en même temps sur les surfaces du cylindre et du cône, et que nous pouvons, par conséquent, considérer comme étant les intersections de ces deux surfaces.

Il résulte évidemment des relations que nous venons de mettre en évidence, que si on prenait un plan de projection perpendiculaire au cylindre *vvvv*, les deux ellipses *aa*, *a'a'* se projetteraient sur ce plan par une seule circonférence qui serait en même temps la projection du grand cercle *zz*, suivant lequel la sphère inscrite dans le cône est touchée par le cylindre.

644. *Projection oblique du cône circulaire.* Si le cône dont il s'agit doit être placé obliquement, il faudra opérer de la manière suivante :

On choisira d'abord l'un des plans de projection parallèle à l'axe du cône, dont la projection sur ce plan sera le triangle isocèle *s'c'c'*, **fig. 326**. Pour compléter la projection sur l'autre plan, il faudrait obtenir la trace du cône ou la projection de sa base. Mais on pourra souvent éviter la construction de ces courbes, en employant pour directrice de la surface du cône la section par un plan *pq* incliné de manière que la projection de cette courbe soit une circonférence de cercle.

Cette manière de procéder sera d'autant plus commode dans les applications, que souvent, au lieu d'un cône *oblique* exigé par la nature de la question, on préfère employer un cône circulaire *coupé obliquement*.

645. Pour déterminer l'inclinaison de la section *a'a'*, de manière que la projection horizontale de cette courbe soit une circonférence de cercle, on prendra sur l'axe du cône un point quelconque ayant pour projections les deux points *oo'*. De ces points, comme centres, on décrira deux circonférences égales, et d'un rayon tel que la circonférence décrite du point *o'* soit tangente aux deux droites *s'c'*, *s'c'*, qui forment les limites de la projection verticale du cône.

Les deux circonférences dont nous venons de parler sont évidemment les deux projections d'une sphère qui serait inscrite dans le cône proposé. On élèvera les deux perpendiculaires *aa''a'*, *aa'a''*, qui couperont les lignes *s'c'* aux quatre points *a'*, *a''*, *a'*, *a''*.

Enfin, les droites $a'a'$, $a''a''$, diagonales du quadrilatère $a'a''$ $a'a''$ seront les projections verticales de deux ellipses dont les projections horizontales se confondront avec la circonférence décrite du point o comme centre.

646. On choisira de préférence l'ellipse $(a'a')$ pour directrice du cône, parce que ses intersections par les génératrices donnent lieu à des angles moins aigus.

Si on doutait que les deux ellipses $(a'a')$ $(a''a'')$ dussent se projeter par la circonférence décrite du point o, il suffira de remarquer d'abord que le diamètre aa est la projection commune des deux axes $a'a'$, $a''a''$; que, de plus, les deux ellipses ont un point commun xx' qui se projette sur la circonférence du grand cercle horizontal de la sphère, et que, d'ailleurs, ces deux ellipses ont pour surface projetante commune le cylindre circulaire et vertical qui touche la sphère suivant le grand cercle horizontal zz, lequel cylindre a par conséquent pour trace la circonférence décrite du point o comme centre.

Les deux tangentes sx, sx seront les limites de la projection horizontale du cône.

Les points de tangence x, x seront déterminés par le moyen géométrique connu, ou par la perpendiculaire $x'x$ abaissée du point x'.

647. Pour construire un point appartenant à la surface du cône et qui serait donné par sa projection verticale m', on tracera la génératrice $s'm'$. Le point n', suivant lequel cette génératrice rencontre la directrice $a'a'$, se projettera sur le plan horizontal par l'un des deux points n, n, ce qui donnera les projections horizontales des deux génératrices sn, sn, qui ont $s'n'$ pour projection verticale commune.

Enfin la perpendiculaire $m'm$ déterminera les deux points m, m qui se projettent tous deux par le point m'.

648. *Base du cône.* La base $c'c'$ du cône étant un cercle incliné, sa projection horizontale sera une ellipse que nous construirons comme nous l'avons dit au n° 548.

Le centre u étant déterminé, on fera eu égal à $u'c'$, ce qui donnera le grand axe ee de l'ellipse demandée. Les extrémités c, c du petit axe seront déterminées par les perpendiculaires $c'c$, $c'c$.

649. *Traces du cône.* Si l'on prend pour directrice la base rabattue du cône circulaire, ou la section par un plan pq, incliné de manière que la projection soit un cercle, il sera presque toujours inutile de construire les traces du cône. Nous allons cependant, comme exercices, indiquer les moyens d'obtenir ces courbes.

650. *Ellipse.* Soient données, **fig. 324**, les deux projections d'un cône circulaire ayant pour sommet le point s, s', et pour directrice une section aa, $a'a'$, que l'on obtiendra comme nous l'avons dit au n° 494, on veut construire la trace du cône.

Nous remarquerons d'abord que cette trace doit être une ellipse, puisque le plan horizontal AZ coupe toutes les génératrices d'une même nappe (645), et que, d'ailleurs, l'angle $x'c'a'$ est plus grand que $a's'c'$ (632).

Les génératrices $s'c'$, $s'c'$ percent le plan horizontal en deux points c, c, qui sont les extrémités du grand axe de l'ellipse cherchée. Le point uu', milieu de la droite cc, sera le centre de cette courbe, et le petit axe $e''e''$, projeté sur la ligne AZ par un seul point u', doit être égal au double de la ligne $u'e$.

En effet, l'axe $e''e''$, perpendiculaire au plan vertical de projection, est une corde commune à l'ellipse cherchée $ce''ce''$ et au cercle provenant de la section du cône par le plan $q'y$ perpendiculaire à son axe. Si donc on rabat cette dernière section sur le plan vertical qui contient l'axe du cône, l'une des extrémités de la corde $e''e''$ viendra se placer en e sur la circonférence décrite du point y comme centre avec le rayon yt, ce qui déterminera la longueur de $u'e$ moitié de $e''e''$, second axe de l'ellipse $ce''ce''$.

651. Si du point u, comme centre, on décrit l'arc de cercle cx'', et que l'on construise (*Géom.*) le point x'' suivant lequel

cet arc serait touché par la tangente sx'', l'ordonnée $x''x$ déterminera les points xx, et par conséquent les deux tangentes sx, sx, qui complètent la projection horizontale du cône.

Nous avons vu que ces points pouvaient encore être déterminés en construisant par le point s deux tangentes à la circonférence $axax$.

Enfin on remarquera, pour troisième vérification, que les points x'', x, x, x', doivent être tous sur une même droite perpendiculaire à la ligne AZ (646).

652. *Foyers.* On peut obtenir ces points en opérant comme nous l'avons dit au n° 250, ou bien en faisant usage de la propriété que nous avons démontrée aux nos 638, 639 et 640. Ainsi, par exemple, si nous partageons l'angle $s'c'x'$, **fig. 324**, en deux parties égales par la droite $c'r'$, le point r' sera le centre d'une sphère qui toucherait en même temps le cône et le plan horizontal AZ, de sorte que le point de tangence FF′ sera l'un des foyers de l'ellipse.

Le second foyer sera déterminé par la droite qui partage en deux parties égales l'angle $u'c's'''$.

653. *Parabole* La trace du cône projeté, **fig. 328**, sera une parabole, puisque l'angle $x'c'a'$ est égal à $a's'c'$ (632).

La courbe aa, $a'a'$ directrice du cône, étant obtenue par la construction indiquée au n° 645, on tracera les deux tangentes sx, sx, qui forment les limites de la projection horizontale du cône.

On partagera l'angle $s'c'x'$ en deux parties égales par la droite $c'r'$.

Le point r', suivant lequel cette droite rencontre l'axe $s'o'$, sera le centre de la sphère inscrite dans le cône et tangente au plan horizontal AZ ; de sorte que le point de tangence FF′ sera le foyer de la parabole.

Il sera utile de se rappeler, comme vérification, que le point F doit être situé sur la droite vF, menée perpendiculairement, par le point v, milieu de la tangente sx.

Si l'on fait ck égal à cF, la droite dd, perpendiculaire à sa, sera la directrice qui, avec le foyer F, suffira pour construire la parabole (374).

654. *Hyperbole*. La trace du cône projeté, **fig. 329**, sera une hyperbole, puisque le plan coupant AZ rencontre les deux nappes du cône.

La courbe *aa*, *a'a'* directrice du cône étant obtenue comme précédemment, on construira les deux tangentes *sx*, *sx*, qui forment les limites de la projection horizontale du cône.

On partagera les angles *s'c'*A, *sc''*Z, chacun en deux parties égales par les droites *c'o'*, *c''n'*.

Les points *o'*, *n'* seront les centres de deux sphères inscrites dans le cône et tangentes au plan horizontal AZ ; de sorte que les points FF' seront les deux foyers de l'hyperbole.

Les points *cc'*, *cc''* seront les sommets, et le point *u*, milieu de *cc*, sera le centre.

De ce point, comme centre, avec un rayon égal à *u*F, on décrira une circonférence, et les quatre points *zzzz*, suivant lesquels cette ligne rencontrera les ordonnées *cz*, passant par les sommets de la courbe, appartiendront aux deux asymptotes. On pourrait encore obtenir ces droites par l'un des deux moyens indiqués aux n°s 633 et 635.

Les asymptotes et le sommet étant obtenus, il sera facile de construire les deux branches de la courbe (387).

655. Intersections des cônes et des cylindres. *Trouver la courbe provenant de l'intersection d'un cylindre et d'un cône.*

On coupera ces deux surfaces par un système de plans parallèles au cylindre et passant par le sommet du cône. Par ce moyen, les sections dans le cône et le cylindre seront des lignes droites.

Soient, par exemple, **fig. 335**, **pl. 67**, le cylindre (A, A') et le cône (B, B') dont il faut trouver l'intersection. Construisons, par le sommet *ss'* du cône, la droite *sc*, *sc'* parallèle au cylindre, et faisons passer par cette droite un plan *p* ; ce plan sera lui-même parallèle au cylindre et le coupera suivant les deux lignes (*aa'*) (*aa'*); de plus, il coupera le cône suivant les deux génératrices (*bb'*) (*bb'*). Or ces quatre lignes étant dans un même plan donneront, par leurs intersections, quatre points (*u*, *u'*.....) appartenant à la courbe demandée. Trois de ces

points sont au dessus du plan horizontal, le quatrième est au dessous.

Un second plan, contenant la droite (sc, $s'c'$), donnera quatre nouveaux points de la courbe.

Un troisième plan en donnera quatre autres et ainsi de suite.

On continuera ces constructions jusqu'à ce que l'on ait obtenu un nombre de points assez rapprochés pour que l'on puisse tracer la courbe.

656. On devra ici, comme dans la question du n° 561, chercher de préférence les points qui sont situés sur les génératrices qui forment les limites des projections du cylindre et du cône.

Tout plan dont la trace serait hors de l'angle formé par les traces des plans p' et p'' ne couperait pas le cône, et par conséquent ne contiendrait pas de points communs aux deux surfaces.

Dans l'exemple qui nous occupe, les courbes d'intersection sont séparées et forment par conséquent pénétration.

657. *Tangente à la courbe d'intersection.* Si l'on veut obtenir une tangente au point mm', on construira : 1° la droite vz, trace horizontale d'un plan qui toucherait le cylindre dans toute l'étendue de la génératrice mz, $m'z'$.

2° La droite vx, trace horizontale d'un second plan qui toucherait le cône dans toute l'étendue de la génératrice mx, $m'x'$.

3° La droite vm, projection horizontale de l'intersection des deux plans tangents, et par conséquent de la tangente au point mm'.

4° La droite $v'm'$, projection verticale de la tangente demandée.

On fera bien de construire ainsi quelques tangentes partout où il y aura incertitude sur la direction de la courbe.

Si l'on veut construire les courbes de pénétration dans les surfaces développées du cylindre et du cône, il faudra opérer comme nous l'avons dit aux n°s 502 et 601.

658. On peut simplifier les opérations en plaçant, **fig. 332**, le cylindre perpendiculairement à l'un des plans de projection ; la trace du cylindre sur ce plan devient alors la projection de la courbe, et il ne reste plus qu'à élever des perpendiculaires par les points où cette projection est rencontrée par les projections des génératrices du cône.

659. *Trouver la courbe provenant de l'intersection de deux cônes.*

On construira, **fig. 336**, la droite (*so*, *s'o'*) qui joint les sommets des deux cônes, puis par cette droite on fera passer des plans. Chacun de ces plans contenant les deux sommets coupera les cônes suivant des lignes droites qui, par leur intersection, donneront les points de la courbe demandée. Ainsi, par exemple, le plan *p* coupe le cône (A, A') suivant deux génératrices (*a*, *a'*) (*a*, *a'*), et le cône (B, B') suivant les deux lignes (*b*, *b'*) (*b*, *b'*). Ces quatre lignes donnent, par leurs intersections, les quatre points (*u*, *u'*...). Deux de ces points appartiennent à la courbe de pénétration par laquelle le sommet du cône B sort du cône A ; le troisième fait partie de l'intersection formée par le prolongement des nappes inférieures des deux cônes ; et le quatrième, projeté horizontalement en *u'*, derrière le plan vertical, appartient à la ligne *u'k'* provenant de l'intersection des deux nappes supérieures.

660. Si l'on n'avait pas sur l'épure les sommets des cônes proposés ni le point où la droite qui contient ces sommets rencontre le plan horizontal, on pourrait couper les deux cônes par des plans parallèles aux plans de projection. Les intersections des cônes par ces plans seraient semblables aux traces, et ces courbes, faciles à construire (621), se couperaient suivant des points appartenant à l'intersection demandée.

Ce moyen s'emploie surtout avec avantage lorsque les traces des cônes proposés sont des cercles.

661. *Tangentes.* La droite *vz* est la trace horizontale d'un

plan qui touche l'un des cônes suivant la génératrice zu, $z'u'$.

La droite vx est la trace horizontale d'un plan qui touche le second cône suivant la génératrice xu, $x'u'$. La ligne vu sera, par conséquent, la projection horizontale de la tangente au point uu'.

Le plan tangent $o'v'z$ étant perpendiculaire au plan vertical de projection, la droite $v'u'$ sera la projection verticale de la tangente.

Les développements des cônes se construiront comme nous l'avons dit au n° 601.

662. Les courbes provenant de la pénétration de deux cylindres ou d'un cylindre avec un cône peuvent quelquefois être planes.

Ainsi, par exemple, si le cylindre et le cône projetés, **fig. 330**, avaient pour directrice commune une ellipse vu, l'intersection de ces deux surfaces donnerait lieu à une seconde ellipse.

En général, *toutes les fois que deux cônes, deux cylindres, ou enfin un cylindre et un cône sont du second degré* (592), *et que ces deux surfaces se pénètrent, si la courbe d'entrée est une courbe du second degré, la courbe de sortie sera pareillement du* SECOND DEGRÉ (Algèbre appl.).

663. *Raccordement des surfaces cylindriques et coniques.* Pour que la surface d'un cylindre et celle d'un cône soient tangentes l'une à l'autre, il faut qu'ils soient touchés par un même plan dans toute l'étendue d'une génératrice commune.

Cela exige que le sommet du cône soit situé sur cette ligne.

Ainsi, par exemple, si les deux courbes ac, co, **fig. 331**, se touchent et se raccordent au point c, la surface conique qui aurait son sommet en s et pour directrice la courbe co, devra se raccorder avec la surface du cylindre qui aurait pour génératrice sc et pour directrice la courbe ac.

664. Les deux surfaces coniques sac, $s'co$, **fig. 333**, se raccordent parce que leurs directrices se raccordent, et que les deux sommets s et s' sont situés sur une même généra-

trice *sc* qui contient le point de raccordement des directrices.

Il est évident que les deux cônes se raccorderaient encore s'ils avaient pour directrices deux courbes quelconques *ac*, *c'o'* touchées par un même plan, pourvu que la droite qui joindrait les points de tangence *c*, *c'* contienne les sommets des deux cônes.

665. La combinaison la plus simple de deux cônes a lieu lorsqu'ils ont un sommet commun. Dans ce cas, il faut distinguer trois cas, et pour mieux les mettre en évidence, supposons que l'on prenne pour directrices les sections de ces deux cônes par un même plan.

Si les directrices ne se rencontrent pas, il est évident que les deux cônes n'auront pas d'autre point commun que le sommet.

Si les directrices se touchent, les deux cônes seront tangents l'un à l'autre, suivant la génératrice qui passe par le point de tangence des directrices.

Enfin, si les deux directrices se coupent suivant un ou plusieurs points, les deux cônes se couperont suivant toutes les génératrices qui passent par les points d'intersection des directrices.

666. *Trouver l'intersection d'un cône par une ligne courbe.*

On construira, **fig. 334**, une seconde surface conique ayant même sommet que le cône donné A, A', et dont la directrice sera la courbe donnée (*a*, *a'*). Ces deux cônes se couperont suivant les deux génératrices communes (*b*, *b'*) (*b*, *b'*), et les intersections de ces deux droites par la courbe proposée seront les points demandés (*m*, *m'*) (*m*, *m'*).

Quand la ligne donnée est droite, comme au n° 473, la surface conique auxiliaire devient un plan.

Si l'on n'avait pas le sommet du cône, il serait bon d'employer comme surface auxiliaire l'un des cylindres projetant de la courbe proposée.

L'intersection avec le cône ne présenterait aucune difficulté (658).

667. Remarque. Dans les applications des mathéma-

tiques, il ne faut pas confondre un principe général avec une méthode générale. En effet, *il ne peut pas y avoir de méthode générale dans la pratique.*

Ainsi, lorsque l'on veut obtenir la courbe de pénétration de deux surfaces coniques, il faut les couper par des surfaces auxiliaires qui peuvent être *quelconques*, et c'est dans cette faculté d'employer les surfaces que l'on veut, que consiste la *généralité du principe*. Mais lorsque l'on dit qu'il faut couper les cônes donnés par des plans qui contiennent les deux sommets, on indique une méthode qui paraît générale en théorie, mais qui, dans les applications, n'est presque jamais praticable : d'abord, parce que l'on a rarement sur l'épure les traces ou les sommets des deux cônes donnés ; ensuite, parce que la droite qui joindrait ces sommets est quelquefois tout entière en dehors de l'épure, on rencontre les plans de projections suivant un point trop éloigné pour qu'il soit possible d'en faire usage. On ne fait pas assez d'attention à ces circonstances qui se reproduisent à chaque pas dans les applications de la géométrie descriptive ; ainsi, les surfaces coniques qui forment l'intrados de certaines voûtes dans les monuments, ou dans les fortifications, les cônes ou les cylindres dont les intersections ont lieu si souvent dans les assemblages de la charpente, ou des machines, n'ont presque jamais leurs traces sur l'épure.

Il est donc évident que lorsqu'on propose à un élève de trouver l'intersection de deux surfaces dont on a étudié d'avance la nature et la position de manière à obtenir le résultat sur le tableau, ou sur la planche à dessiner, on attire son attention sur des combinaisons qu'il ne rencontrera jamais dans la pratique, et l'on néglige, au contraire, celles qui se présentent à chaque pas dans l'exécution des travaux.

Je ferai remarquer encore que, dans les questions où un cône se trouvera combiné avec une autre surface, on emploiera presque toujours le cône circulaire ou de révolution, et même, lorsque la théorie indique l'usage d'un cône *oblique*, on préfère souvent le remplacer par un *cône circulaire coupé obliquement*.

C'est pourquoi je crois utile de consacrer quelques planches à l'étude des cônes circulaires.

668. Intersection de deux cônes circulaires (*pl.* **68**).

1° Le premier plan de projection étant perpendiculaire à l'axe du cône B, on prendra le second plan de projection A'Z', parallèle aux deux axes qui, dans le cas actuel, se rencontrent.

2° On construira les projections des deux cônes données sur le plan A'Z', que nous pouvons supposer vertical pour mieux fixer les idées, et la circonférence du rayon SD sera par conséquent la projection horizontale du cône BB'.

3° La sphère qui a pour centre le point OO' étant inscrite dans le cône CC', on tracera les deux tangentes *u*T, et la projection horizontale de ce deuxième cône sera déterminée.

4° Les perpendiculaires abaissées sur A'Z', par les points *o'* et *c'*, *c'* détermineront le centre et les deux axes de l'ellipse suivant laquelle se projette la base circulaire du cône CC'.

5° La droite *u's'* percera au point *v'v* le plan A''Y'' qui contient la base du cône CC'.

6° Si par la droite *us*, *u's'* on conçoit un plan P_1 dont l'intersection avec le plan A''Y'' serait la droite *vm*, ce plan coupera le cône CC' suivant les deux génératrices *u*-1, *u'*-1 dont les pieds 1, 1, seront déterminés par la rencontre de la droite *vm*, avec l'ellipse suivant laquelle se projette la base du cône CC'.

7° La droite *un* parallèle à *vm* sera la projection horizontale de la droite suivant laquelle le plan P_1 coupe le plan A'''Y''' parallèle au plan A''Y''.

8° La droite *mn* coupera la circonférence qui forme la base du cône BB', suivant deux points 1, 1 que l'on joindra avec le sommet *ss'*, et les droites *s*-1, *s'*-1 ainsi obtenues seront les intersections du cône BB' par le plan P_1.

9° Enfin, les génératrices *s*-1, *s'*-1 du cône BB' rencontreront les génératrices *u*-1, *u'*-1 du cône CC' suivant 4 points, 1, 1, 1, 1, dont il sera facile d'obtenir les projections verticales.

10° Si l'on ne veut pas construire l'ellipse suivant laquelle se projette la base du cône CC', ou si les intersections de cette courbe par la droite *vm* se font trop obliquement, on rabattra le plan A''Y'' sur le plan horizontal de projection.

Par suite de ce mouvement, la base du cône CC' sera la circonférence qui a pour centre *o''* et pour rayon *o''c''* égal à

$o'c'$, le point vv' se rabattra en v'' et la droite $v''m$ coupera la circonférence $o''c''$ suivant les deux points 1, 1 qui, ramenés sur la droite A″Y″ et de là sur l'ellipse oc, détermineront les deux génératrices u-1, u'-1 du cône CC′.

On peut aussi, comme vérification, rabattre le point uu' en u'' ; la droite $u''n$ parallèle à $v''m$ déterminera le point n, et par suite, la trace horizontale mn du plan P_1.

L'exemple actuel contient deux courbes séparées qui forment par conséquent ce que l'on nomme *pénétrations*, et le plan qui contient les deux axes coupe les cônes en deux parties symétriques dont les projections verticales se confondent.

Cette circonstance permettra de compléter rapidement les projections horizontales des courbes de pénétration, puisqu'il suffira de reporter symétriquement, au delà du plan vertical vu, les points que l'on aura obtenus en deçà.

669. Pour obtenir les génératrices du cône CC′ qui sont tangentes aux points 2, 2 des courbes de pénétration :

1° On coupera le cône BB′ et la droite $s'u'$ par un plan horizontal P.

2° On obtiendra de cette manière le cercle horizontal de rayon sa et le point $z'z$ de la droite $(su, s'u')$.

3° On construira zx tangente au cercle sa, le rayon sx perpendiculaire à zx ; puis la droite bd perpendiculaire à sx et parallèle, par conséquent, à zx sera la trace horizontale d'un plan P_2 tangent au cône BB′, et contenant la droite su, $s'u'$.

4° La droite $v''b$ suivant laquelle le plan A″Y″ est coupé par le plan P_2 rencontrera le cercle $o''c''$ aux points 2, 2 qui, ramenés dans le plan A″Y″, détermineront sur le cône CC′, les deux génératrices u-2, u'-2 tangentes aux points 2, 2 des courbes de pénétration.

5° Enfin, on déterminera de la même manière, ou par la symétrie, les deux points symétriques des mêmes courbes.

670. *Tangentes*. Si l'on veut obtenir une tangente en un point ee' de la courbe de pénétration, on pourra opérer de la manière suivante :

1° La droite HD perpendiculaire au rayon *s*D de la base du cône BB′ sera la trace horizontale d'un plan P_3 tangent à ce cône suivant la génératrice SD.

2° La droite *u*K, *u*′K′, génératrice du cône CC′, pourra être considérée comme une tangente au point *ee*′ du cône CC′.

3° La droite LK″ perpendiculaire au rayon *o*″K″ de la base rabattue sera également tangente au cône CC′.

4° Les deux droites *u*K, LK″ tangentes au point KK″ du cône CC′, détermineront la trace horizontale MN du plan P_4 qui touche ce cône dans toute l'étendue de la génératrice *u-k*, *u′-k′*, et par conséquent au point *ee*′ de cette génératrice.

5° Enfin la droite HX, H′X′ suivant laquelle le plan P_3 tangent au cône BB′ coupe le plan P_4 tangent au cône CC′, sera la tangente au point *ee*′ de la courbe d'intersection des deux cônes.

Il est évident qu'en opérant de la même manière, on obtiendra autant de tangentes que l'on voudra.

671. *Deuxième étude sur les intersections de cônes circulaires*, **pl. 69.** Dans l'exemple qui précède, on avait sur l'épure une partie de la droite passant par les deux sommets; dans la question actuelle, cette droite est tellement éloignée, qu'il est impossible d'employer aucun de ses points.

Dans ce cas, on pourra opérer de la manière suivante. Le cercle indiqué par une teinte de points sur la figure **1**, étant considéré comme la projection verticale d'une sphère, on pourra toujours concevoir deux cônes enveloppant B″ et C″, qui seraient semblables et parallèles aux deux cônes donnés par leurs projections verticales, **fig. 2**, et par leurs axes, **fig. 3.**

Les diagonales du quadrilatère *cvkr* seront les projections verticales de deux ellipses *ck, vr* qui forment les courbes de pénétration des deux cônes projetés sur la figure **1**, de sorte que tout plan parallèle à l'une quelconque de ces deux ellipses coupera les deux cônes de la figure **1** et par conséquent ceux de la figure **2** suivant des ellipses semblables, et si l'on choisit un plan de projection sur lequel ces ellipses se projettent par des cercles, les opérations à effectuer deviendront très-simples.

672. Or, nous avons vu au numéro 642 comment on peut déterminer le plan de projection qui satisfait aux conditions que nous venons d'énoncer. Ainsi :

1° On coupera, **fig. 1**, l'un des deux cônes B″, par exemple par le plan *bd* perpendiculaire à son axe, et passant par le centre *m* de l'ellipse *ck*;

2° On rabattra la section circulaire du cône par le plan *bd*, et l'ordonnée *mz* sera le demi-petit axe de l'ellipse *ck* ;

3° Par un arc *zz'*, décrit du point *m* comme centre, on ramènera le point *z* sur la circonférence qui a pour diamètre *mk*, et la droite *mz'* déterminera la direction du plan AY sur lequel l'ellipse *ck* se projettera par un cercle, car le triangle *mz'k* étant rectangle en *z'*, il est évident que le côté *mz'*, qui est égal au demi-petit axe de l'ellipse *ck*, est la projection du demi-grand axe *mk* de la même ellipse.

673. D'après cela,

1° Si l'on coupe les cônes projetés, **fig. 2**, par le plan P_1 parallèle au plan de l'ellipse *ck*, **fig. 1**, on obtiendra pour sections deux ellipses R'R' et V'V' semblables à l'ellipse *ck* de la figure 1re;

2° Le point M', milieu de R'R', sera le centre de l'ellipse qui a cette droite pour grand axe;

3° Le point N' milieu de V'V' sera le centre de la seconde ellipse ;

4° Ces courbes projetées sur le plan A″Y″, parallèle au plan AY de la figure **1**, donneront les deux cercles qui ont pour centres les points M″ et N″, **fig. 3** ;

5° Ces cercles se couperont suivant deux points 1, 1 qui, ramenés successivement dans le plan horizontal Y‴Y″, dans le plan de projection Y″A″ et enfin dans le plan coupant P_1 par les lignes projetantes perpendiculaires au plan Y″A″, appartiendront à la courbe d'intersection des deux cônes ;

6° La même opération répétée déterminera autant de points que l'on voudra.

On pourra éviter la confusion en projetant une partie des lignes sur un second plan de projection A‴Y‴ parallèle comme le plan A″Y″ au plan AY de la figure **1**. Ainsi, les

cercles décrits des points X″ et U″ comme centres sont les projections sur le plan A‴Y‴ des deux ellipses semblables suivant lesquelles les deux cônes donnés sont coupés par le plan P_2 qui contient les points 2, 2 de la courbe demandée.

On fera bien de déterminer, sur la figure **2**, les droites M′X′ et U′N′ qui contiennent les centres de toutes les ellipses semblables provenant de la section des deux cônes par les plans parallèles au plan P de la figure **1**.

674. *Tangente.* Pour obtenir une tangente en un point *ee′* de la courbe d'intersection, on remarquera que le plan tangent au point *ee′* du cône BB′ sera déterminé par la génératrice S-*e* et par la droite *x*-P_3 tangente au cercle qui forme la base supérieure du cône.

Pour obtenir le plan tangent au point *ee′* du tronc de cône CC′, on pourra opérer de la manière suivante :

1° Par la projection verticale *e′* du point donné, on construira un plan perpendiculaire à l'axe du cône CC′ ;

2° La section du cône par ce plan sera un cercle projeté sur le plan vertical par la droite *zo* ;

3° La droite *oa′*, perpendiculaire à la génératrice EF du cône CC′, déterminera le centre *a′* d'une sphère inscrite, qui touchera le cône suivant le cercle projeté sur le plan vertical par la droite *zo* ;

4° On rabattra le point *ee′* en *e″* sur le méridien principal de la sphère, et l'on construira la tangente *e″t″* perpendiculaire à l'extrémité du rayon rabattu *a′e″* ;

5° La tangente *e″t″* perce le plan horizontal Y‴Y″ en un point *t″* projeté en *t‴*, que l'on ramènera en *t* dans le plan vertical qui contient le centre *aa′* de la sphère et le point donné *ee′* ;

6° La droite P_4 perpendiculaire sur *ae*, sera l'intersection du plan horizontal Y‴Y″ par le plan P_4 tangent au point *ee′* du cône CC′ ;

7° Enfin, les deux droites P_3 et P_4 situées dans le plan horizontal Y‴Y″ se couperont suivant le point *xx′*, et les droites *x*-*e*, *x′*-*e′* seront les deux projections de la tangente demandée.

CHAPITRE IV.

La sphère.

675. Définitions. On considère ordinairement la sphère comme engendrée par le mouvement d'un demi-cercle qui tournerait autour de son diamètre. Cette manière de concevoir la génération de la sphère lui a fait donner le nom de *surface de révolution*. Le demi-cercle, dont le mouvement engendre la surface sphérique, sera la *génératrice* ; et le diamètre autour duquel se fait le mouvement se nomme l'*axe* de la sphère.

Pour plus de simplicité, nous prendrons toujours pour axe un diamètre perpendiculaire à l'un des plans de projection ; de sorte que toute section par un plan perpendiculaire à l'axe sera un cercle parallèle au plan de projection.

676. *Projection de la sphère.* Si, par le centre de la sphère, **fig. 337, pl. 70**, on conçoit un plan p parallèle au plan horizontal, ce plan coupera la sphère suivant un grand cercle dont la projection horizontale sera prise pour limite de la projection de la sphère ; de même on prendra pour limite de la projection verticale de la sphère celle du grand cercle provenant de la section par le plan p' parallèle au plan vertical de projection.

677. *Parties vues et cachées.* Toute la partie de la surface de la sphère qui est au dessus du plan p sera vue en projection horizontale, tandis que l'hémisphère au dessous du même plan sera caché.

Sur la projection verticale on devra considérer comme vue toute la surface de l'hémisphère qui est en deçà du plan p', tandis que l'hémisphère au delà doit être caché.

678. *Génération*. Si nous supposons que le demi-cercle $a'b'd'$ tourne autour de l'axe vertical $a'd'$ pour engendrer la surface de la sphère, chaque point décrira un cercle horizontal dont le rayon sera déterminé par la distance de ce point à l'axe. Ainsi, par exemple, pendant que le point bb' parcourra l'arc bh, $b'h'$, le point (mm') viendra se placer en nn'. Le demi-cercle générateur étant toujours perpendiculaire au plan horizontal, sa projection sur ce plan sera la ligne droite ch, de sorte que pour avoir la projection verticale d'un de ses points, du point n, par exemple, on construira d'abord les deux projections mn, $m'n'$ du cercle que parcourt le point m et l'on aura une perpendiculaire jusqu'à la rencontre de la ligne $m'n'$. En recommençant cette construction, on obtiendra la courbe $a'n'h'd'$ pour la projection verticale du cercle générateur amené dans la position ch. La courbe $a'n'h'd'$ est une demi-ellipse.

679. *Méridiens*. Toute section de la sphère par un plan qui contient le centre est un grand cercle qui partage la surface en deux parties égales. C'est pourquoi on la nomme *section méridienne*. Cependant on réserve plus particulièrement cette expression pour les sections par des plans qui contiennent le diamètre que l'on a choisi pour l'axe de la sphère, et qui, par conséquent, sont perpendiculaires à l'un des plans de projection.

Ainsi la courbe $a'h'd'$ sera une section méridienne si nous prenons pour axe de la sphère la verticale passant par le point c.

Le grand cercle $a'b'd'v'$, parallèle au plan vertical de projection, se nomme *section méridienne principale* ou simplement *méridien principal*.

Si on avait pris pour axe l'horizontale projetante du point c', le grand cercle $vzbx$ serait le méridien principal.

680. *Parallèles de la sphère*. Les sections méridiennes ne

sont pas les lignes les plus simples que l'on puisse tracer sur la surface d'une sphère, et dans les diverses questions que nous pourrons avoir à résoudre par la suite il sera souvent commode de faire usage des sections de la sphère par des plans parallèles aux plans de projection. Ainsi, par exemple, si nous coupons la sphère par un plan p'', parallèle au plan horizontal, nous obtiendrons pour section un cercle projeté sur le plan vertical par la droite $q'm'$, et sur le plan horizontal par le cercle $qvmu$.

La section par le plan p''' sera le cercle (st, $s't'$).

681. *Exprimer qu'un point appartient à la surface d'une sphère.*

Supposons que l'on connaisse la projection horizontale e, et qu'il faille trouver la projection verticale, on construira par le point e un plan p^{IV} parallèle au plan vertical et coupant la sphère suivant un cercle dont la projection verticale $e'g'e'$ contiendra celle du point cherché ; de sorte que, pour déterminer cette projection, il suffira d'élever par le point e une perpendiculaire à la ligne AZ jusqu'à la rencontre du cercle $e'g'e'$, ce qui donnera deux solutions e', e'.

Pour exprimer qu'une courbe (oz, $o'z'$) est située sur la sphère, il suffira de faire, pour chacun de ses points, la construction précédente.

682. Développement de la sphère. La surface de la sphère n'est pas développable d'une manière rigoureuse, c'est-à-dire qu'elle ne peut pas être étendue sur un plan sans déchirement ; mais dans les applications à l'industrie on développe la sphère approximativement de deux manières différentes.

683. *Développement par fuseaux.* Partageons en parties égales, en 16 par exemple, chacun des deux grands cercles de la sphère A, A', **fig. 339**; puis, par les points de division, menons les sept plans horizontaux 0, 1, 2, 3, et les seize plans méridiens m, m... La surface de la sphère sera, par suite de cette construction, partagée en 96 trapèzes, plus 32 petits triangles ayant pour sommet commun les points 4

qui sont les pôles de la sphère. Tous ces triangles et trapèzes auront une même hauteur, égale à la seizième partie d'un grand cercle de la sphère, et leurs bases projetées sur le plan horizontal dans leurs véritables grandeurs seront égales chacune à la seizième partie de l'un des cercles provenant de la section de la sphère par les plans horizontaux 0, 1, 2, 3.

En disposant ces trapèzes comme on le voit, **fig.** A″, on aura le développement, par fuseaux, de l'hémisphère supérieur. Les hauteurs des trapèzes sont égales aux arcs 0-1, 1-2, etc., et les bases sont données par les arcs horizontaux correspondants et compris entre deux méridiens consécutifs (*m*, *m*...).

684. *Développement par zones.* La figure A‴ représente le développement par zones de l'hémisphère inférieur ; il ne diffère du développement par fuseaux que par la disposition des trapèzes qui sont placés à côté les uns des autres au lieu d'être l'un au dessus de l'autre.

On facilitera la construction de ce développement en remarquant que la première zone, composée de seize trapèzes *a*, *a*, *a*..., peut être considérée comme la surface d'un tronc de cône dont le sommet serait situé en *s*, où l'axe de la sphère est rencontré par le prolongement de la corde qui joint le point 0 avec le point 1 ; de sorte que, pour construire ce développement, on décrira d'un point *s'* comme centre, avec un rayon égal à *so*, un arc de cercle sur lequel on portera seize fois la seizième partie du grand cercle *o*. La seconde zone fait partie d'un cône qui a son sommet au point *t*. On en construira le développement de la même manière, et ainsi de suite.

Il est bien entendu que l'on doit partager les cercles en un assez grand nombre de parties égales pour que la courbure des arcs soit sensible. Si seize points de division ne suffisaient pas, on en prendrait davantage.

685. Les globes et cartes de géographie sont des développements approximatifs de la sphère. Les premiers sont imprimés par fuseaux et collés ensuite sur un globe dont ils sont le développement ; les cartes sont des développements par zones.

On fait encore usage des développements de la sphère, dans la construction des ballons et dans l'architecture, pour le tracé des voûtes sphériques et coupoles.

686. Lorsque la zone que l'on doit développer a beaucoup de hauteur, et que l'on ne veut pas la partager en zones plus petites, on s'y prend de la manière suivante. Soit, **fig. 340**, *ab* l'arc générateur de la zone dont on veut construire le développement. On rectifiera cet arc et l'on en portera la longueur de *b* en *i*. L'on mènera *ih* parallèle au rayon *cb*, puis enfin *kh* parallèle à *ab*. Il résulte de là que *hk* sera égal en longueur à l'arc *amb*. Or, pendant que l'arc *ab*, tournant autour de *cs*, engendrera la zone proposée, la ligne *kh* engendrera un tronc de cône dont la surface différera peu de celle de cette zone, et l'on pourra prendre, sans erreur sensible, l'une de ces surfaces pour l'autre.

Si on voulait construire dans le développement un point *m* quelconque appartenant à la surface de la zone, on joindrait ce point avec le centre de la sphère par un rayon *cm*, dont l'intersection avec la surface du cône déterminerait un point *n*, qui serait placé dans cette surface à très-peu près comme le point *m* dans la surface de la zone.

687. *Sections perpendiculaires aux plans de projection.* Après les sections parallèles aux plans de projection et les sections méridiennes, les lignes les plus simples que l'on puisse obtenir sur la sphère sont celles qui proviennent de sections par des plans perpendiculaires aux plans de projection.

Supposons, par exemple, que l'on veuille obtenir la section de la sphère A, A′, **fig. 338**, par le plan B. Construisons un plan *p*, parallèle au plan horizontal de projection. Ce plan coupera la sphère suivant un cercle *a*, *a′*, et le plan donné suivant une droite *bb′*. Cette droite coupera le cercle *aa′* en deux points (*uu′*) qui feront partie de la courbe demandée. En recommençant cette construction on obtiendra autant de points que l'on voudra.

Pour éviter les intersections qui auraient lieu suivant des angles trop aigus, on fera usage simultanément de plans

parallèles au plan horizontal et de plans parallèles au plan vertical.

Le plan horizontal passant sur le centre de la sphère donnera les points $x'x$ suivant lesquels la projection horizontale de la courbe touche le grand cercle qui représente la projection de la sphère.

688. On sait (*Géom.*) que la section d'une sphère par un plan est toujours un cercle, et qu'en outre ce cercle, placé obliquement dans l'espace, doit avoir pour projection une ellipse dont il sera facile de trouver les axes. Pour cela, on abaissera du centre de la sphère la ligne (Ac, $A'c'$) perpendiculaire sur le plan coupant, et le point cc' où cette perpendiculaire perce ce plan sera le centre de la section. Or, lorsqu'un cercle est projeté obliquement, tous ces diamètres se raccourcissent, excepté celui qui est parallèle au plan de projection ; de sorte que le grand axe de l'ellipse devant être horizontal et situé dans le plan B sera parallèle à la trace horizontale de ce plan ; de plus, $v'z'$ est la projection verticale dans sa véritable grandeur d'un diamètre de la section ; donc en portant $c'z'$, avec le compas de c en h et de c en k, on aura hk pour le grand axe de l'ellipse qui forme la projection horizontale du cercle cherché. Le petit axe, perpendiculaire au grand, doit être situé dans le plan p', parallèle au plan vertical, d'où il résulte qne la projection v du point vv' sera l'extrémité du petit axe de l'ellipse que l'on construira par le moyen connu.

689. On peut souvent éviter la projection oblique du cercle provenant de la section en le faisant tourner pour le rabattre sur l'un ou sur l'autre des deux plans de projection. Ainsi, par exemple, pour avoir la section par le plan B′ perpendiculaire au plan horizontal, on fera tourner ce plan autour de la droite dd', jusqu'à ce qu'il soit venu prendre la position B″. Dans ce mouvement, le point e, qui représente le centre de la section, décrira l'arc horizontal ee'' et viendra se projeter sur le plan vertical en ee'''. De ce point comme centre avec un rayon $e'''s'''$ égal à es, on décrira un cercle qui sera la section rabattue dans sa véritable grandeur.

Il sera facile en ramenant la section à sa place, d'obtenir

sa projection verticale. Ainsi, par exemple, le point m, rabattu en m'' et projeté dans ce rabattement en m''', doit avoir sa projection verticale au point m' provenant de l'intersection de l'horizontale $m'''m'$ avec la perpendiculaire mm'.

690. Les positions principales qu'un plan peut prendre par rapport à une sphère sont au nombre de quatre :

1° Si le plan dont il s'agit contient le centre, la section sera un grand cercle de la sphère ;

2° Si la distance au centre de la sphère est moindre que le rayon, la surface sera un petit cercle ;

3° Si le plan coupant s'éloignait du centre de la sphère, le rayon de la section diminuerait, et lorsque la distance du centre au plan coupant sera égale au rayon de la sphère, ce plan deviendra tangent et la section réduite à un point sera le point de tangence ;

4° Enfin, lorsque la distance d'un plan au centre de la sphère sera plus grande que le rayon de cette surface, il est évident que ce plan ne rencontrera pas la sphère.

691. Si l'un des plans de projection est perpendiculaire au plan donné, on pourra reconnaître, à l'inspection de l'épure, quelle est la position relative du plan et de la sphère.

Ainsi, par exemple, si la distance Ac', **fig. 338**, est plus petite que le rayon de la sphère, la section sera un petit cercle. Si Ac' était égal à zéro, la section serait un grand cercle.

Si Ac' était égal au rayon, le plan serait tangent.

Enfin, si Ac' était plus grand que le rayon, le plan ne rencontrerait pas la sphère.

692. Il résulte de ce qui précède que nous ne devons pas considérer le point de tangence comme un point *simple*, mais comme provenant du rapprochement de tous les points de la courbe de section.

693. Le point de tangence détermine la position du plan tangent, parce que ce point devant toujours être considéré comme une petite circonférence dont le rayon serait égal à zéro, le plan de cette circonférence sera toujours perpendiculaire à la droite qui joint son centre avec celui de la sphère

et sera, par conséquent, tangent à cette surface (*Géom.*).

694. Plans tangents à la sphère. *Construire un plan tangent à une sphère par un point pris sur la surface de cette sphère.*

Soient, **fig. 341**, **pl. 71**, la sphère (A, A′) et le point (m, m') situé sur la surface de cette sphère, on construira le rayon (Am, A′m'), puis on fera passer (113) par le point (m, m') un plan perpendiculaire à ce rayon. Ce plan sera tangent à la sphère (*Géom.*).

Toute ligne située dans le plan tangent et passant par le point m, m' sera une tangente à la sphère.

Le rayon *am*, étant perpendiculaire au plan tangent, sera nécessairement *normal* à la surface de la sphère, et par conséquent tout plan passant par le centre sera un *plan normal*.

695. *Construire par une droite donnée, un plan tangent à une sphère.*

1re *méthode.* Par le centre de la sphère A, **fig. 345**, on fera passer un plan p, perpendiculaire à la droite donnée b. Ce plan coupera la droite en un point m, et la sphère suivant un grand cercle c; construisant les deux tangentes ms, mt, les plans p' et p'' contenant ces tangentes et la droite donnée satisferont à la question. En effet, le plan p' contenant la droite b est perpendiculaire sur le plan p, d'où il suit que le rayon Au situé dans ce plan, et perpendiculaire à la ligne mt, intersection des deux plans p et p', sera aussi perpendiculaire à ce dernier plan qui alors sera tangent à la sphère. Le même raisonnement conviendra pour le plan p''.

Il ne reste donc plus qu'à exécuter cette construction. Pour cela :

Supposons d'abord le cas où la droite donnée serait perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple.

Cette droite b' se projettera, **fig. 346**, par un seul point b. Les lignes bv, bu, menées par ce point et tangentes à la projection horizontale de la sphère, seront les traces des deux plans tangents p' et p'', qui auront leurs traces verticales perpendiculaires à la ligne AZ.

696. Si la droite donnée était oblique par rapport aux plans de projection, l'opération serait plus difficile.

Représentons la sphère donnée par (A, A′), **fig. 343**, et la droite donnée par (b, b').

On fera d'abord passer (113), par le centre de la sphère, le plan p perpendiculaire à la droite (b, b'), et l'on déterminera le point (m, m') suivant lequel ce plan coupe la droite donnée. Quant au grand cercle suivant lequel la sphère sera coupée par le plan p, il aurait pour projection une ellipse; mais pour éviter la construction de cette courbe, on fera tourner le plan p, soit autour de sa trace, soit, comme on l'a fait ici, autour de l'horizontale (h, h') qui passe par le centre de la sphère. Dans ce rabattement, la section par le plan p se confondra avec le grand cercle c, formant la projection horizontale de la sphère, et le point (m, m') viendra se placer en m''. Il sera facile alors de construire les deux tangentes ($m''u''$, $m''v''$). Pour ramener ces deux lignes à la place qu'elles doivent occuper dans l'espace, on remarquera que les points t, s ne doivent pas changer de place, puisqu'ils appartiennent a la droite (h, h'), que l'on a prise pour charnière du rabattement ; de sorte qu'en joignant ces deux points avec m, on aura (mt, ms) pour les projections horizontales des deux tangentes. Les points t, s se projetteront verticalement suivant (t', s') et détermineront les projections verticales ($m't'$, $m's'$) des tangentes. On fera passer par chacune d'elles et par la droite donnée un plan qui sera tangent à la sphère : les lignes ($u''u$) ($v''v$) perpendiculaires à la droite h' donneront les projections des points de tangence.

La solution précédente revient à concevoir la sphère enveloppée par un cylindre circulaire parallèle à la droite donnée, et à construire par cette droite deux plans tangents au cylindre.

697. *Deuxième méthode.* Au lieu d'un cylindre, on peut employer un cône. En effet, supposons, **fig. 342**, que la sphère donnée A soit enveloppée par un cône qui aurait pour sommet un point quelconque pris sur la droite donnée b.

Il ne restera plus qu'à faire passer par cette droite un plan tangent au cône. Il est évident que ce plan touchera la sphère.

Le cône qui enveloppe la sphère étant circulaire, et le sommet pouvant être pris partout où on voudra sur la droite donnée, il sera possible d'appliquer les principes que nous avons exposés au n° 644, et les opérations seront alors réduites à une grande simplicité.

Soit, **fig. 344**, la sphère donnée AA′ et la droite donnée *b′*.

Le plan A*s*, parallèle au plan vertical de projection, déterminera un point *ss′* que nous prendrons pour sommet du cône auxiliaire.

En opérant comme nous l'avons dit au n° 645, il sera facile de déterminer la section *aa*, *a′a′* dont la projection horizontale se confond avec le grand cercle qui forme la limite de la projection de la sphère.

Le plan oblique *pq*, qui contient la section *aa*, *a′a′*, est percé par la droite donnée en un point *m′m*, par lequel on construira les deux tangentes *mo*, *mc*. Ces droites et la ligne donnée *bb′* déterminent les deux plans tangents qu'il sera facile de construire (69).

Les points de tangence *uu′*, *vv′* résultent de l'intersection du petit cercle *zx*, suivant lequel la sphère est touchée par le cône auxiliaire avec les deux droites *s′c′*, *s′o′*, suivant lesquelles ce cône doit être touché par les deux plans demandés.

698. *Troisième méthode*. On peut concevoir la sphère donnée A, **fig. 348**, **pl. 72**, enveloppée par deux cônes circulaires, ayant pour sommets deux points quelconques *s*, *t* de la ligne donnée.

Ces cônes toucheront la sphère suivant deux petits cercles *aa*, *cc* dont les intersections seront les points de tangence.

La figure **349** contient les opérations.

La sphère étant donnée par les deux grands cercles AA′, et la droite par les deux projections *bb′*,

On prendra, pour plus de simplicité, le sommet *ss′* de l'un des deux cônes auxiliaires dans le plan qui contient le centre de la sphère, et qui est parallèle au plan vertical de projection.

Ce premier cône touchera la sphère suivant un petit cercle projeté sur le plan vertical par la droite *aa*. La projection horizontale de ce cercle serait une ellipse dont nous éviterons la construction en faisant un rabattement.

Nous prendrons ensuite le sommet *t't* du second cône auxiliaire dans le plan horizontal qui contient le centre de la sphère. Le petit cercle, suivant lequel ce cône touche la sphère, aura pour projection horizontale la droite *cc*, et pour projection verticale une ellipse que nous ne construirons pas.

Or, les points de tangence devant appartenir aux deux cercles projetés par les droites *aa*, *cc*, il ne reste plus qu'à trouver leur intersection.

Si on avait construit la projection horizontale du cercle *aa*, ou la projection verticale du cercle *cc*, les points d'intersection de ces deux cercles seraient déterminés par les intersections de leurs projections ; mais, pour éviter les projections elliptiques, nous rabattrons le cercle *aa* en le faisant tourner autour de l'horizontale projetante du point *o*, pris où l'on voudra dans le plan *pzp*.

Dans ce mouvement, le centre *v* du cercle *aa* décrira un arc parallèle au plan vertical de projection et viendra se projeter en *v'*.

La circonférence décrite du point *v'* comme centre, avec un rayon *v'a'* égal à *va*, sera par conséquent le petit cercle *aa* rabattu sur le plan horizontal.

Or, les points de tangence cherchés devant résulter de l'intersection des deux cercles *aa*, *cc* appartiennent par conséquent à la droite suivant laquelle se coupent les plans qui contiennent ces cercles.

Cette droite, dont les projections sont *o'a*, *oc*, coupera l'horizontale projetante du point *o'o* en un point *o*, qui, dans le rabattement, ne doit pas changer de place.

Un second point quelconque *rr'* de la droite *ao'*, *co* étant rabattu en *r''*, on construira cette ligne *or''* dans le rabattement et les points *m''*, *n''* où elle coupe le cercle *v'a'* seront les points de tangence demandés.

Il ne restera plus qu'à faire revenir ces points à leur place, ce qui donnera pour leurs projections les deux points *mm'*, *nn'*.

Les points de tangence étant obtenus, on pourra construire les plans tangents en opérant comme nous l'avons dit au n° 694.

On peut aussi joindre les points mm', nn', avec les sommets des deux cônes par des droites qui, avec la ligne donnée bb', sont suffisantes pour déterminer les plans tangents demandés par la question.

699. *Quatrième méthode.* On peut encore remplacer l'un des cônes auxiliaires, dont nous venons de parler, par un cylindre parallèle à la ligne donnée. Dans ce cas, l'un des deux petits cercles aa, cc deviendrait un grand cercle dont le plan, passant par le centre de la sphère, serait perpendiculaire à la droite donnée.

Le reste se ferait comme dans l'épure précédente, c'est-à-dire que l'on rabattrait le cercle suivant lequel la sphère serait touchée par le cône auxiliaire, que l'on pourrait toujours choisir comme ci-dessus, de manière que son axe soit parallèle à l'un des plans de projection.

On rabattrait également l'intersection du plan perpendiculaire à la droite donnée, et passant par le centre de la sphère avec le plan du cercle, suivant lequel cette surface serait touchée par le cône auxiliaire.

Les points de tangence obtenus dans le rabattement seraient ensuite ramenés à leur place. Je me contenterai d'indiquer cette dernière méthode comme exercice.

700. Les relations qui précèdent donnent une deuxième solution d'un problème que nous avions résolu au n° 175.

Supposons qu'il s'agisse de *construire un plan qui fasse avec les plans de projection des angles donnés.*

Soit V l'angle que le point cherché doit faire avec le plan vertical, et H l'angle que ce même plan doit faire avec le plan horizontal.

1° On décrira une circonférence quelconque ayant pour centre un point o, pris à volonté sur la ligne AZ; cette circonférence pourra représenter en même temps les deux projections d'une sphère dont les méridiens principaux seraient alors situés dans les plans de projection.

2° On construira la tangente *sa*, de manière que l'angle *sao* soit égal à l'angle H. Si on suppose que cette tangente tourne autour de la verticale *so*, elle engendrera un cône circulaire qui aurait son sommet en *s* et dont la base sera la circonférence *ama*.

3° On construira la tangente *uc* telle que l'angle *uco* soit égal à l'angle V, puis on supposera que cette tangente tourne autour de l'horizontale *uo*, ce qui donnera un second cône circulaire ayant son sommet en *u* et dont la base sera la circonférence *cnc*.

Or, il est évident que tout plan tangent au premier cône fera avec le plan horizontal un angle *sao* égal à H.

De plus, tout plan tangent au second cône fera avec le plan vertical un angle *uco* égal à V.

Donc un plan qui serait en même temps tangent aux deux cônes satisferait aux conditions demandées.

La construction que nous venons d'indiquer donne *deux* solutions, savoir : le plan *p* et le plan *p'*.

Les traces de ces deux plans doivent contenir les sommets *s* et *u* des deux cônes auxiliaires et de plus être tangentes aux traces *ama*, *cnc* de ces cônes.

701. Si les plans demandés devaient contenir un poin donné dans l'espace, on pourrait d'abord opérer comme nous venons de le faire, après quoi il ne resterait plus qu'à faire passer par le point donné des plans parallèles à ceux que l'on aurait trouvés.

Dans ce cas, aux deux solutions précédentes, il faudrait en ajouter deux autres, savoir : un troisième plan qui aurait sa trace verticale parallèle à *px* et sa trace horizontale parallèle à la droite *xp''*, qui touche derrière le plan vertical la trace de l'un des deux cônes auxiliaires.

Enfin, un quatrième plan qui aurait sa trace verticale parallèle à *p'r* et sa trace horizontale parallèle à *rp'''*.

Si la somme des angles H + V était égale à un angle droit, les traces des deux cônes auxiliaires passeraient par les points *s* et *u* ; de sorte que les quatre plans se réduiraient à deux qui seraient parallèles à la ligne AZ ; et si la somme des angles H + V était plus petite qu'un angle droit, les

points s et u seraient dans l'intérieur des cônes auxiliaires, et, dans ce cas, le problème serait impossible.

Ce résultat est conforme à ce que nous avons dit au n° 176.

702. *Construire un plan tangent à une sphère, par un point situé hors de la surface de cette sphère.*

1re *méthode*. Par le point donné ss', **fig. 347**, on fera passer une droite aa' par laquelle on construira deux plans tangents à la sphère, une seconde droite bb' déterminera deux autres plans tangents, une troisième droite en donnera encore deux, et ainsi de suite. Le nombre des plans que l'on peut construire ainsi est infini. Tous ces plans seraient tangents au cône circulaire enveloppant la sphère et la toucheraient suivant un petit cercle zx que l'on nomme *courbe de contact*.

Si le point donné se rapprochait de la sphère, l'angle du cône s'ouvrirait, le cercle de contact diminuerait, et son plan s'éloignerait du centre de la sphère ; enfin lorsque le point donné arriverait sur la surface de la sphère, tous les plans tangents se réuniraient en un seul, qui remplacerait le cône enveloppant ; le cercle de contact, réduit à zéro, se confondrait avec le point donné.

Si, au contraire, le point donné s'éloignait à l'infini, le cône se changerait en un cylindre circulaire, et le cercle de contact deviendrait un grand cercle de la sphère.

703. 2e *méthode*. On prendra un plan de projection parallèle à la droite qui joint le point donné avec le centre de la sphère.

On concevra la sphère enveloppée par le cône circulaire qui aurait le point donné pour sommet.

On déterminera la direction du plan pq, de manière que la section $a'a'$ du cône par ce plan se projette par une circonférence aa (645).

Enfin, tous les plans tangents demandés seront déterminés par le point donné ss' et par chacune des tangentes à la courbe aa, $a'a'$.

On remarquera que toutes ces tangentes ont une projection verticale commune pq, et que toutes leurs projections horizontales doivent être tangentes à la circonférence aa.

Les points de tangence seront déterminés par la rencontre du petit cercle zx avec les génératrices suivant lesquelles chaque plan tangent touche le cône auxiliaire.

704. *Courbe de contact.* Dans les questions diverses que l'on peut proposer sur les plans tangents, il faut distinguer les cas où il est nécessaire de construire les traces de ces plans, de ceux où le but principal est d'obtenir les points de tangence.

Ainsi, par exemple, si on veut construire la courbe suivant laquelle la sphère serait touchée par tous les plans qui contiennent le point donné, on pourra se dispenser de construire les traces de ces plans.

En effet la courbe cherchée est la circonférence du petit cercle, suivant lequel la sphère serait touchée par la surface du cône circulaire qui aurait pour sommet le point donné.

Pour construire les deux projections de cette circonférence, on choisira, **fig. 350,** un plan de projection parallèle à la droite qui joint le point donné ss' avec le centre de la sphère.

On tracera les deux tangentes $s'z'$, $s'x'$ et la corde $z'x'$ qui joint les deux points de tangence.

Cette dernière ligne sera la projection verticale du cercle demandé.

La projection horizontale sera une ellipse dont le grand axe cc doit être égal à $z'x'$, et le petit axe zx est la projection horizontale du diamètre $z'x'$.

705. Dans les deux questions précédentes, **fig. 347** et **350,** nous avons placé le centre de la sphère et le point donné dans un plan parallèle au plan vertical de projection. Si le point donné était placé partout ailleurs, on ramènerait la question au cas précédent, en faisant usage d'un plan de projection parallèle à l'axe du cône auxiliaire.

706. La question que nous venons de résoudre serait, au

contraire, réduite à sa plus simple expression, si le point donné était situé sur l'une des perpendiculaires projetantes du centre de la sphère.

Dans ce cas, **fig. 351**, la ligne de contact serait le petit cercle $z'x'$, zx, et les plans tangents passant par le point donné auraient pour traces horizontales les droites b, b', b'' tangentes à la trace du cône auxiliaire.

Les traces verticales, s'il était nécessaire de les construire, seraient facilement déterminées en opérant comme nous l'avons dit au n° 65.

707. *Construire un plan tangent à la sphère, parallèlement à une droite donnée.*

1re *méthode.* Nommons bb' la ligne donnée, **fig. 352, pl. 73**; une droite quelconque cc', menée parallèlement à la ligne donnée, déterminera deux plans tangents qui satisferont à la question ; une seconde droite oo' en donnera deux autres, et ainsi de suite. Le nombre des plans qui satisfont à la question est infini, ils toucheront tous un cylindre circulaire enveloppant la sphère et parallèle à la droite donnée. La ligne de contact sera un grand cercle zx dont le plan sera perpendiculaire à la direction de cette ligne.

708. 2e *méthode.* Concevons la sphère projetée sur un plan parallèle à la ligne donnée bb'.

Deux tangentes sv, sv seront les limites de la projection verticale du cylindre circulaire qui enveloppe la sphère et qui est parallèle à la droite bb'.

Un plan $a'a'$, perpendiculaire au plan vertical de projection et passant par deux angles opposés du quadrilatère $a'a''a'a''$, coupera le cylindre suivant une ellipse qui aura pour projection horizontale la circonférence aa (552).

Enfin, chaque plan tangent sera déterminé par l'une des génératrices du cylindre auxiliaire et par la tangente à la section aa, $a'a'$, au point où cette courbe est rencontrée par la génératrice du cylindre.

Toutes ces tangentes auront la droite $a'a'$ pour projection verticale commune, et toutes leurs projections horizontales seront tangentes à la circonférence aa.

Les intersections des génératrices de tangence avec le cercle zx, suivant lequel ce cylindre touche la sphère, donneront les points de tangence.

709. *Courbe de contact.* Si la question avait uniquement pour but de déterminer la courbe de contact, on se contenterait de construire, **fig. 354**, la projection horizontale zx du cercle $z'x'$, suivant lequel la sphère donnée est touchée par le cylindre auxiliaire.

Cette projection sera une ellipse dont le grand axe cc doit être égal à $z'x'$, et qui aurait pour petit axe la droite zx, projection de $z'x'$.

710. Si la droite donnée, au lieu d'être parallèle à l'un des plans de projection, était inclinée d'une manière quelconque, on emploierait une projection auxiliaire parallèle à cette ligne, et la question serait ramenée au cas précédent.

711. *Étant donnés un point, une droite et une sphère, construire par le point un plan qui touche la sphère et qui soit parallèle à la droite donnée*, **fig. 353.**

On prendra le point donné s pour sommet d'un cône qui envelopperait la sphère, puis on tracera, par le sommet du cône, une seconde droite b parallèle à la ligne donnée a ; la question sera réduite à construire par la droite b, un plan tangent à la sphère.

Il y aura deux solutions.

En faisant usage d'un plan de projection parallèle à l'axe du cône auxiliaire, on pourra employer la construction du n° 697.

712. *Construire un plan tangent à deux sphères.*

Concevons les deux sphères A, B, **fig. 355,** enveloppées par un cône circulaire ayant son sommet en s. Tout plan touchant ce cône sera tangent aux deux sphères données. Le nombre de ces plans est infini. Pour les construire, on pourra opérer comme nous l'avons dit (703) ; ou bien on fera passer par le sommet du cône une suite de droites par chacune des-

quelles on construira deux plans tangents à l'une des deux sphères ; chacun de ces plans touchera le cône dans toute l'étendue d'une génératrice, et contiendra par conséquent un point de la seconde sphère.

En enveloppant les deux sphères par le cône dont le sommet est en u, et construisant des plans tangents à ce cône, on obtiendra encore une série infinie de plans tangents aux deux sphères.

Si les deux sphères se touchaient, cette seconde série de plans se réduirait à un seul ; enfin, si elles se coupaient, il ne resterait plus que les plans tangents au cône dont le sommet est en s, lesquels plans se réduiraient eux-mêmes en un seul, si les sphères données se touchaient intérieurement.

713. Si l'on voulait *construire un plan tangent aux deux sphères par un point* m, *situé hors de leurs surfaces*, on joindrait ce point avec le point s, par la droite sm qui déterminerait deux plans tangents, la droite um en déterminerait deux autres ; ainsi le problème admettrait quatre solutions. Si le point donné était placé en n ou en v sur la surface de l'un des deux cônes et hors du second, le nombre des solutions se réduirait à trois.

Il n'y aurait que deux plans tangents si le point donné était en z ou en t, sur les cercles d'intersection des deux cônes.

Si le point donné était en x ou en y, c'est-à-dire sur l'un des deux cônes et dans l'intérieur de l'autre, il n'y aurait qu'un plan tangent.

Enfin le problème serait impossible, si le point donné était en même temps dans l'intérieur des deux cônes.

714. *Construire un plan tangent à trois sphères.*

Étant données les trois sphères A, B, C, **fig. 356**, on construira des cônes qui envelopperaient ces sphères deux à deux, tant extérieurement qu'intérieurement ; on obtiendra pour les sommets de ces cônes six points, s, t, u, x, y, z, qui étant pris trois à trois, donneront quatre lignes droites, stu, sxz, tyz. uyx. Tout plan passant par l'une de ces droites et

touchant l'une des trois sphères sera nécessairement tangent aux deux autres. Ainsi, par exemple, un plan qui contiendrait la droite *stu* et qui toucherait la sphère A, contiendrait dans toute son étendue l'une des génératrices du cône *u*A ; il aurait donc un point de commun avec la sphère B. et comme il contient le point *s*, il toucherait le cône *s*B et par conséquent la sphère C.

Par chacune des quatre droites passant par les sommets des cônes, on pourra mener deux plans tangents, ce qui fera huit solutions pour le cas général.

Voici la disposition de ces plans :

	En deçà de	Au delà de
1er	A, B, C	. . . . .
2	. . . . .	A, B, C.
3	A	B, C.
4	B, C.	A.
5	B	A, C.
6	A, C.	B.
7	C	A, B.
8	A, B.	C.

Si quelques-unes de ces sphères se touchaient ou se coupaient, le nombre de ces solutions diminuerait. Si les sphères étaient égales, les deux premiers plans seraient parallèles ; enfin si les rayons des sphères se réduisaient à zéro, les huit plans tangents se confondraient en un seul, les cônes enveloppants deviendraient trois lignes droites, et la question se réduirait à faire passer un plan par trois points, **fig. 358**.

715. *Construire un plan tangent à une sphère et à un cylindre.*

Concevons, **fig. 357**, la sphère enveloppée par un cylindre parallèle au cylindre donné ; il ne restera plus qu'à construire un plan tangent aux deux cylindres. Pour y parvenir, on coupera ces deux cylindres par un plan quelconque, ce qui donnera deux courbes que l'on sait construire ; les tangentes communes à ces deux courbes appartiendront aux plans de-

mandés ; enfin, on mènera par ces droites des plans parallèles aux deux cylindres. Si le cylindre donné B a pour directrice une courbe convexe et fermée, comme on le voit dans la figure, le problème admettra quatre solutions. En général, le nombre des solutions sera égal au nombre des tangentes que l'on pourra mener aux courbes provenant de l'intersection des deux cylindres par un plan quelconque.

716. Si le cylindre proposé B était circulaire, on pourrait encore opérer comme il suit : on inscrirait dans ce cylindre B une sphère C, puis l'on construirait le cône *s*C, qui envelopperait cette sphère et la sphère donnée ; enfin, menant par le point *s* une droite *a* parallèle au cylindre donné, on ferait passer par cette droite deux plans tangents à l'une des deux sphères ; ces plans satisferaient à la question. La droite *b*, menée parallèlement au cylindre par le sommet du cône qui enveloppe les sphères A et C intérieurement, déterminera deux autres plans tangents.

Si le rayon de la sphère donnée devenait égal à zéro, la question se réduirait au problème du n° (510).

Si les génératrices du cylindre se rapprochaient et se réduisaient à une seule, on reviendrait à la question (695).

717. *Construire un plan tangent à une sphère et à un cône.*

Concevons, **fig. 359**, la sphère donnée A enveloppée par un second cône ayant le même sommet que le cône proposé ; il ne s'agira plus que de construire un plan tangent à ces deux cônes. Pour cela on les coupera par un plan quelconque, ce qui donnera deux courbes auxquelles on mènera des tangentes. On fera passer un plan par chacune de ces tangentes et le sommet commun des deux cônes. Dans le cas indiqué sur la figure **359**, il y aura quatre solutions.

718. Si le cône proposé B est circulaire, on pourra inscrire dans ce cône une sphère C ; puis construisant le cône qui enveloppera les deux sphères, on n'aura plus qu'à mener les plans tangents aux deux cônes. Joignant les sommets par la

droite sv, on construira par cette droite deux plans tangents à l'une des sphères ; ces deux plans toucheront l'autre sphère et le cône donné.

La droite qui joint le point s avec le point u déterminera deux autres plans tangents.

Pour exécuter ces épures, on construira les projections des données, puis les tangentes aux projections des sphères seront les limites des cylindres ou cônes enveloppants. On opérera pour le reste comme dans les problèmes précédents.

719. *Construire l'intersection d'une ligne droite avec la surface d'une sphère.*

Soit (a, a'), **fig. 360, pl. 74**, la droite donnée ; construisons par cette droite un plan p, perpendiculaire au plan horizontal; ce plan coupera la sphère (AA') suivant un cercle vertical dont la projection horizontale b doit se confondre avec celle de la droite donnée, et qui aura pour projection verticale l'ellipse b' que l'on construira par l'un des moyens indiqués (687, 688). Ce cercle sera coupé par la droite (a, a'), suivant deux points (m, m') (m, m') qui appartiennent à la surface de la sphère.

On peut éviter la construction de l'ellipse b' en faisant tourner le plan p autour de la verticale d, d', situé dans ce plan, jusqu'à ce qu'il soit arrivé dans la position p'' parallèle au plan vertical. Dans ce rabattement, la droite donnée devient a'', et la section dans la sphère est le cercle b'', les points demandés sont $(m''m'')$; les projetant en $(m'''m''')$, et ramenant le plan p'' à sa position primitive, on aura les projections (m, m). Quant aux projections verticales (m', m'), elles seront déterminées par les intersections des horizontales passant par les points m'', m'', avec les perpendiculaires à la ligne AZ, passant par les points (m, m).

720. Si le cercle b'' était touché par la droite a'', on en conclurait que la ligne aa' touche la surface de la sphère, et si a'' ne rencontrait pas b'' il n'y aurait pas de points communs entre la sphère et la droite donnée.

721. Si l'une des projections de la ligne donnée, **fig. 363**,

passait par le centre de la projection correspondante de la sphère, on emploierait comme surface auxiliaire le plan projetant de la ligne ; la section dans la sphère serait un grand cercle, dont on éviterait la construction en le rabattant autour de la ligne projetante du centre ; par suite de ce mouvement la droite donnée viendrait se placer en a'', et les deux points m'', m'', ramenés à leur place, deviendraient (m, m) (m', m').

722. Enfin, si la ligne donnée était parallèle à l'un des plans de projection, le plan auxiliaire serait lui-même parallèle à ce plan, de sorte que la section dans la sphère se projetant par un cercle, il n'y aurait à construire ni ellipse ni rabattement.

723. *Construire la section de la sphère par un plan oblique aux plans de projection.*

Concevons, **fig. 362**, un plan horizontal p. Ce plan coupera la sphère A suivant un cercle (a, a'), et le plan donné B suivant une ligne (b, b') parallèle à la trace horizontale de ce plan. Or le cercle (a, a') et la droite (b, b'), étant dans un même plan, se couperont en deux points (m, m') (m, m'), qui feront partie de la courbe cherchée. En recommençant cette construction, on obtiendra autant de points que l'on voudra. Mais pour vérifier les constructions et pour éviter les intersections trop aiguës, il sera bon de faire simultanément usage de plans parallèles au plan horizontal, et de plans parallèles au plan vertical. Ainsi un plan p', parallèle au plan vertical, vérifierait la position de l'un des points m, m' et déterminerait celle du point nn'.

Cette méthode a l'inconvénient de laisser de l'incertitude sur la position du point le plus élevé, et sur celle du point le plus bas de la courbe.

On pourra trouver ces points, et en même temps on donnera plus d'exactitude aux constructions en projetant la sphère sur un plan auxiliaire p'', vertical et perpendiculaire au plan coupant B. La projection A'' de la sphère sur ce plan s'obtiendra en prenant sur la projection verticale primitive la hauteur du centre au dessus du plan horizontal, et l'on aura la nouvelle trace du plan B en projetant un point quelconque

de ce plan sur le plan auxiliaire p''. Dans cette nouvelle projection verticale, la section, qui est une courbe plane, sera représentée par la ligne droite vz. Le point v sera le point le plus bas de la courbe et le point z sera le point le plus élevé. Pour construire par ce moyen la projection horizontale d'un point de la courbe, on concevra comme précédemment un plan horizontal p, qui coupera la sphère suivant le cercle a, et le plan B suivant la droite b, et l'intersection de b avec a donnera les deux points m, m.

724. Comme l'on sait (*Géom.*) que l'intersection d'une sphère par un plan est toujours un cercle, il sera encore plus exact de rabattre ce cercle sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de la trace horizontale du plan B. Les deux points qui, sur le plan auxiliaire p'', sont projetés en m'' viendront, dans le rabattement sur le plan horizontal, se placer en m^{IV}, m^{IV}, et leurs projections horizontales (m, m) seront déterminées par les intersections de la ligne $m''b$ avec les droites mm^{IV}, mm^{IV}, menées par les points m^{IV}, perpendiculairement à la trace horizontale du plan B.

Au lieu de la projection auxiliaire sur le plan p'', on aurait pu faire usage de la section par un plan vertical p''' passant par le centre et perpendiculaire au plan B, et l'on aurait pu faire tourner ce plan autour de sa trace verticale pour le rabattre dans la position A'''.

Au surplus, je n'ai indiqué tous ces rabattements que pour faire voir comment on peut vérifier les constructions ou leur donner plus d'exactitude ; mais il sera toujours préférable de prendre dès l'origine un plan de projection perpendiculaire au plan coupant.

725. Au lieu de chercher les points suivant lesquels le plan donné coupe les parallèles de la sphère, on peut déterminer l'intersection de ce plan avec les méridiens.

Ainsi, par exemple, **fig. 361**, le plan méridien 0-4 coupera le plan donné suivant une droite et la sphère suivant un grand cercle. Ces lignes, étant toutes deux situées dans le plan 0-4, se couperont suivant deux points qui appartiennent à la courbe demandée.

Pour eviter la projection elliptique du grand cercle, provenant de la section de la sphère par le plan auxiliaire 0-4, on fera tourner ce plan autour de la verticale projetante du point *o* ; dans ce mouvement, la section méridienne *o-u* viendra se placer dans le plan vertical 0-6′, et se confondra par suite de ce rabattement avec le méridien principal de la sphère ; on construira le point *s*, suivant lequel le plan donné B est percé par la verticale passant par le centre de la sphère. De plus, le point 4 se rabattra en 4″, et la droite *s*-4″ sera l'intersection du plan donné B par le plan méridien 0-4.

Les deux points *u*″, *u*″ projetés sur 0-6′ et ramenés de là dans le plan méridien 0-4, feront partie de la courbe demandée.

Chaque rabattement fera connaître quatre points : en effet, par suite de la position symétrique des deux plans 0-4, 0-5, les opérations effectuées pour déterminer les points situés dans le plan 0-4 conviendront également pour les points situés dans le plan 0-5.

Le plan méridien 0-1, perpendiculaire au plan B, donnera le point le plus bas et le point le plus élevé de la courbe.

La droite *s*-6″, tangente au méridien principal de la sphère, déterminera les deux plans 0-6, 0-7, tangents à la projection horizontale de la courbe cherchée.

726. La section de la sphère par un plan étant toujours un cercle, et la projection d'un cercle étant toujours une ellipse, on peut encore opérer comme il suit : soient, **fig. 361**, la sphère A, A′ et le plan B, on construira par le centre de la sphère un plan méridien 0-1, perpendiculaire au plan B ; en faisant tourner ce plan autour de la verticale, qui passe par le centre de la sphère, le point *s*, suivant lequel le plan donné est percé par la verticale du centre, ne changera pas de place, le point 1 viendra se placer en 1′ et se projettera en 1″. Le cercle cherché, perpendiculaire au plan 0-1, sera représenté dans ce rabattement par la droite *v*″*z*″ égale à la véritable grandeur du diamètre de la section ; le point *c*″, milieu de *v*″*z*″, étant ramené en *c* et relevé en *c*′, donnera les deux projections du centre. Le grand axe de la projection

horizontale sera horizontal, et par conséquent parallèle à la trace horizontale du plan B, et le grand axe de la projection verticale sera parallèle à la trace verticale de ce même plan. De plus, les longueurs de ces grands axes sont égales à la ligne $v''z''$; et comme on sait que les petits axes des ellipses sont perpendiculaires aux grands, il ne manque plus que de connaître ces petits axes ou un point quelconque de la courbe (365) : le point v'' projeté horizontalement en v' et ramené en v sera l'extrémité du petit axe pour la projection horizontale de la courbe.

En faisant par le centre de la sphère une section perpendiculaire à la trace verticale du plan B, et rabattant cette section comme nous venons de le faire pour le plan 0-1, on aura le petit axe pour la projection verticale.

On peut encore remarquer que l'axe mn étant horizontal, doit avoir sa projection verticale parallèle à la ligne AZ, de sorte qu'en élevant la perpendiculaire mm', on aura sur la projection verticale, un point m' qui, avec l'axe $e'r'$, suffit pour construire l'ellipse, et dispense de chercher le petit axe de la projection verticale du cercle.

727. On peut faire usage d'un plan oblique pour résoudre le problème énoncé (719).

Soit, **fig. 364,** la sphère A, A', dont on demande l'intersection par la droite donnée (a, a'). Concevons un plan par cette droite et le centre de la sphère ; l'intersection de la sphère par ce plan sera un grand cercle qui aurait pour projection une ellipse ; mais on évitera la construction de cette courbe en faisant tourner le plan coupant autour de l'horizontale c, c', passant par le centre de la sphère. Par suite de ce rabattement, la section dans la sphère viendra se confondre avec le grand cercle qui forme la limite de sa projection horizontale ; la ligne donnée se rabattra en a'', et les points cherchés seront (m'', m''). Ces points reviendront à leur place, en décrivant deux arcs verticaux projetés en (mm'', mm''), perpendiculairement à la ligne (cc') prise pour charnière du rabattement : les perpendiculaires ($m'm$, $m'm$) détermineront les projections verticales des points demandés.

728. Intersection des sphères, cylindres et cônes. *Trouver la courbe provenant de l'intersection d'une sphère et d'un cylindre.*

Pour obtenir sur la sphère les lignes les plus simples, il faudrait couper les deux surfaces données par des plans parallèles à l'un des plans de projection, mais alors les sections dans le cylindre seraient des courbes égales à sa trace, et que l'on ne pourrait construire que par points, excepté dans le cas où cette trace serait un cercle. On fera donc mieux d'employer des plans parallèles aux génératrices du cylindre et perpendiculaires à l'un des plans de projection. Il est vrai que les sections dans la sphère auront pour projections des ellipses, mais d'abord on pourrait trouver facilement les axes de ces ellipses, qu'il ne serait pas même nécessaire de construire entièrement. Ensuite on pourra éviter la construction de ces courbes en projetant les sections faites dans le cylindre et dans la sphère, sur un plan auxiliaire vertical, et parallèle aux génératrices du cylindre. Ainsi, par exemple, pour obtenir l'intersection de la sphère (A, A′), **fig. 365, pl. 75** et du cylindre (B, B′), on construira un plan vertical p parallèle aux génératrices du cylindre ; ce plan coupera le cylindre suivant deux droites (b, b') (b, b'), qui, projetées sur le plan p'' et rabattues sur le plan horizontal, deviendront (b'', b''). La section dans la sphère sera représentée dans ce rabattement par le cercle a'', et les intersections de ce cercle par les droites (b'', b'') donneront quatre points (m''). En relevant le plan p'', il sera facile d'obtenir les projections horizontales (m, m) de ces quatre points, et par suite leurs projections verticales. En recommençant cette construction on obtiendra autant de points que l'on voudra.

Dans l'exemple que nous avons choisi, il y a deux courbes, ce qui forme une pénétration dans la sphère ; une portion de l'une des deux courbes est située derrière le plan vertical de projection.

La question que nous venons de résoudre revient évidemment à chercher l'intersection de chacune des génératrices du cylindre avec la sphère ; il ne s'agit donc que de faire plusieurs fois la construction indiquée n° 719.

On évite ordinairement la projection auxiliaire sur le plan

p'', en plaçant dès l'origine le cylindre parallèlement à l'un des plans de projection, comme on le voit, **fig. 366.**

729. *Construire la courbe provenant de l'intersection d'une sphère et d'un cône.*

Soient, **fig. 367**, la sphère A, A′ et le cône donné B, B′, on construira par le sommet du cône un plan vertical p, ce plan coupera le cône suivant deux lignes droites (b, b') (b, b'), que l'on rabattra en (b', b''), sur le plan horizontal, en les faisant tourner autour de la trace du plan p, la section de la sphère par ce même plan sera le cercle a'', et les quatre points (m'', m''....) feront partie de la courbe cherchée ; en ramenant le plan p à sa place, les points (m''.....) viendront se projeter en (m...), d'où il sera facile de déduire leurs projections verticales (m'...).

730. Si la trace du cône était un cercle, on pourrait employer comme surfaces auxiliaires des plans parallèles au plan de cette trace. Dans ce cas, **fig. 368**, les sections dans le cône et dans la sphère seraient des cercles parallèles au plan de projection.

731. *Construire la droite provenant de l'intersection de deux sphères.*

Un plan p, parallèle au plan horizontal, **fig. 369**, coupera les sphères proposées suivant deux cercles, dont les projections verticales a' et b' se confondront avec la trace du plan p, et dont les projections horizontales a, b donneront pour leur intersection deux points (m, m) appartenant à la projection horizontale de la courbe cherchée. Les projections verticales de ces mêmes points seront déterminées par les perpendiculaires mm', mm'.

Le plan p', parallèle au plan vertical, vérifie la position de l'un des points précédents et détermine celle du point (n, n'). On obtiendra par ce moyen autant de points que l'on voudra.

Le plan horizontal p'', passant par le centre de la sphère B, B′, donne les points u, v, suivant lesquels le grand cercle formant la projection horizontale de cette sphère est touché

par la projection horizontale de la courbe cherchée, et le plan vertical p''', passant par le centre de la même sphère, donne les points s, z, suivant lesquels la projection verticale est touchée par celle de la courbe.

732. On sait (*Géom.*) que la courbe provenant de l'intersection de deux sphères est un cercle, et que, par conséquent, ses projections doivent être des ellipses.

Si l'on voulait en déterminer les axes, on opérerait de la manière suivante : Concevons, **fig. 370**, un plan vertical p, contenant les centres de deux sphères (A, A') (B, B'). Ce plan les coupera suivant deux grands cercles verticaux qui, rabattus dans le plan Bp', en tournant autour de la verticale du centre, seront représentés par les cercles a et b. Le cercle cherché, perpendiculaire à la ligne des centres, sera, par suite de ce rabattement, projeté par la droite vz, qui sera la véritable grandeur du diamètre, et par conséquent celle des grands axes st, xu : le point v projeté en v' et ramené en v'' donnera l'extrémité du petit axe pour la projection horizontale. En coupant les deux sphères par le plan p'', perpendiculaire au plan vertical, et rabattant la section dans le plan horizontal p''', on obtiendra le point n'' pour l'extrémité du petit axe de la projection verticale. Enfin les plans $p^{\text{v}}p'''$, $p^{\text{v}}p'$, menés par les centres des sphères et parallèlement aux plans de projection, détermineront les points suivant lesquels les grands cercles formant les projections de ces sphères sont touchés par les projections de la courbe.

733. On évitera une grande partie de ces constructions en prenant dès l'origine un plan de projection parallèle à la ligne des centres, comme on l'a fait pour obtenir l'intersection des deux sphères (B, B') (C, C'), **fig. 369** : dans ce cas, la projection verticale de la section est la droite $a'b'$, et la projection horizontale a pour grand axe $cd = a'b'$ et pour petit axe ab, projection horizontale de $a'b'$.

Je terminerai ce chapitre par quelques combinaisons remarquables de la sphère avec le cylindre et le cône.

734. Problème. *Trois points étant donnés, on veut dé-*

terminer un quatrième point dont on connaît les distances aux trois premiers, **pl. 76.**

Exprimons les points donnés par M, N, V et le point cherché par U. Supposons de plus que l'on doit avoir MU = 7 *mètres;* VU = 8 *mètres* et NU = 9 *mètres;* il est évident que la question revient à construire le quatrième sommet d'un tétraèdre qui aurait pour base le triangle MNV et dont les arêtes adjacentes au point U seraient égales aux trois distances données.

Cette question, étudiée une première fois au numéro 212, peut encore être résolue de la manière suivante :

1° Une sphère B, qui aurait pour centre le point M, e pour rayon 7 *mètres*, contiendra évidemment les points demandés.

2° Une deuxième sphère C, dont le centre serait le point N, et qui aurait pour rayon 9 *mètres*, contiendra également les points demandés.

3° Enfin, ces points devant être situés sur une troisième sphère D, de 8 *mètres* de rayon et dont le centre serait au point V, il est évident qu'il ne restera plus qu'à obtenir les points communs aux trois sphères.

4° Pour exécuter cette épure, **pl. 76**, on prendra un plan auxiliaire de projection A″Z″ vertical et parallèle à la droite *mn*, qui joint les centres des sphères B et C.

5° Le plan de projection A″Z″ étant rabattu, les points *mn′*, *nn′* seront projetés par *m″* et *n″*, dont les hauteurs au dessus de A″Z″ seront égales à celles des projections verticales primitives *m′* et *n′* au dessus de A′Z′.

6° Les sphères B et C seront projetées sur le plan A″Z″ par leurs grands cercles décrits de *m″* et *n″* comme centres avec des rayons de 7 et de 9 *mètres*.

7° La corde *h″k″*, qui joint les points d'intersection de ces deux circonférences, sera la projection sur le plan vertical A″Z″, du petit cercle suivant lequel se coupent les deux sphères B et C.

Or, le cercle *k″h″*, lieu de tous les points communs aux deux sphères B et C devra évidemment contenir les deux points cherchés, et la question se trouve par conséquent réduite à la recherche des points suivant lesquels la circonfé-

rence du cercle $k''h''$ pénètre dans la troisième sphère D, ce qui revient par conséquent à chercher l'intersection d'une ligne avec une surface.

8° Pour résoudre cette dernière partie de la question, on projettera, sur le plan A''Z'', la sphère, qui a pour centre le point vv', projeté en v'', et dont le rayon est égal à 8 *mètres*.

9° On coupera cette sphère par le plan projetant du cercle $k''h''$, ce qui donnera un cercle projeté sur le plan A''Z'' par la droite $r''s''$, et dont le centre sera projeté au milieu c'' de la droite $r''s''$.

Or les points demandés devant appartenir aux deux cercles $k''h''$ et $r''s''$, il ne reste plus qu'à trouver leurs intersections; mais comme les projections de ces deux cercles sur le plan A''Z'' se confondent avec la trace $k''s''$ de leur plan projetant A'''Z''', il est nécessaire de rabattre ce plan. Pour cela,

10° On peut le faire tourner autour de l'horizontale projetante de A''', jusqu'à ce qu'il soit venu se rabattre sur le plan horizontal de projection.

11° Par suite de ce mouvement, les centres o'' et c'' des deux cercles $k''h''$ et $r''s''$ dont on cherche les intersections viendront se rabattre sur le plan horizontal en o''' et c'''.

12° La circonférence décrite de o''' comme centre avec un rayon égal à $o''h''$ représentera le cercle $k''h''$ rabattu, et la circonférence décrite de c''' comme centre avec le rayon $c''r''$ sera le rabattement du cercle $r''s''$.

13° Les deux points u''' suivant lesquels ces deux circonférences se rencontrent satisferont aux conditions du problème.

14° Pour ramener ces points à leur place, on les projettera d'abord sur A''Z'', puis on les ramènera en u'', u'' sur A'''Z''', d'où l'on déduira leurs projections horizontales u, u, sur les droites $u'''u$, parallèles à A''Z''.

15° Enfin, les perpendiculaires à A'Z' menées par les projections horizontales u, u contiendront les projections verticales u', u' dont les hauteurs au dessus de A'Z' doivent être égales à celles des points u'', u'' au dessus de A''Z''.

735. Pour obtenir les points u, u' communs aux trois sphères, on pourrait :

1° Construire le cercle suivant lequel se coupent deux quelconques de ces trois sphères ;

2° On construirait ensuite le cercle provenant de la rencontre de la troisième sphère avec l'une quelconque des deux premières ;

3° Les points communs aux deux cercles ainsi obtenus seraient les points demandés.

Mais les deux cercles n'étant pas dans un même plan, les points suivant lesquels ils se rencontrent ne pourraient plus être déterminés par un rabattement, et l'épure serait beaucoup moins simple.

736. Problème. *Les droites* bb′, cc′, dd′, **pl. 77**, *sont les axes de trois cylindres circulaires égaux, et tels que chacun d'eux est tangent aux deux autres.*

Chacun de ces axes est incliné sur le plan horizontal de projection d'une quantité égale à l'angle V, *et leurs projections horizontales se coupent suivant les sommets* m, v, n *d'un triangle équilatéral dont un des côtés* mv *est parallèle à la ligne* A′Z′, *d'où il résulte que l'un des trois cylindres demandés est parallèle au plan vertical de projection.*

Enfin, les traces horizontales des droites données sont les points E, F, G *situés sur les prolongements des côtés du triangle* mvn *de manière que l'on a* mE = vF = nG.

On demande de construire :

1° Les projections horizontales et verticales des trois cylindres ;

2° Les courbes d'intersection de ces cylindres et d'une sphère d'un rayon donné dont le centre est situé dans le plan qui contient les trois points suivant lesquels se touchent les cylindres et sur la verticale qui contient le centre du triangle *mvn*.

Projection verticale des droites données.

1° Le point E étant projeté en E′ sur la ligne A′Z′, on fera l'angle H′E′G′ égal à l'angle donné V, et la droite E′*b*′ sera la projection verticale de l'axe du cylindre BB′ ;

2° La verticale du point *v* déterminera sur E′*b*′ un point *v*′ par lequel on tracera l'horizontale QR ;

3° Les points n' et m' situés sur les axes $F'c'$ et $G'd'$, à la même hauteur que le point vv', seront déterminés par les verticales nn', mm'.

Rayons des cylindres. Les trois cylindres devant être égaux et se toucher, il est évident que le rayon de la section droite sera pour chacun d'eux égal à la moitié de la perpendiculaire qui détermine la plus courte distance de deux quelconques des trois lignes données.

Pour obtenir cette plus courte distance, on peut opérer de plusieurs manières :

Première méthode (140). On projettera les deux droites dont on veut obtenir la distance sur un plan perpendiculaire à l'une d'elles. Ainsi :

1° Si par le point EE', ou tout autre point de la droite $E'b'$, on trace une ligne $A''Z''$ perpendiculaire sur $E'b'$, on pourra considérer les deux droites $A''Z''$, $E'E$ comme les traces d'un plan perpendiculaire au plan vertical de projection et à l'axe $E'b'$ du cylindre BB' ;

2° Le plan $A''Z''$ étant considéré comme plan de projection, on le rabattra sur l'épure en le faisant tourner autour de sa trace horizontale ;

3° La droite $E'b'$ se projettera sur ce plan $A''Z''$ par un seul point E, qui ne changera pas de place puisqu'il appartient à la charnière du rabattement ;

4° Enfin, les points HH' et KK', pris arbitrairement sur la droite Gm, $G'm'$, étant projetés sur le plan $A''Z''$ et rabattus en H'' et K'', on aura $K''H''$ pour la projection de la droite dd' sur le plan $A''Z''$;

5° La droite Ea'' perpendiculaire sur $K''H''$, sera la plus courte distance des axes des deux cylindres BB' et DD', et le point u'', milieu de Ea'', sera le point de tangence de ces deux cylindres, dont les rayons seront égaux à $u''E$, moitié de Ea'' ;

6° La droite $a''a$, parallèle à $A'Z'$, déterminera sur Gm la projection horizontale du point a ;

7° Le point a'' projeté sur $A'Z'$ et ramené dans le plan $A''Z''$, deviendra le plan d'une perpendiculaire projetante qui déterminera sur Gm' la projection verticale du point a', et si

l'on a bien opéré, les deux points seront sur une même perpendiculaire à A'Z';

8° La droite $a'r'$, parallèle à A''Z'', sera la projection verticale de la perpendiculaire commune aux deux droites bb' et dd', et la verticale abaissée de r' déterminera sur Eb la projection horizontale r du point rr', et par suite la projection horizontale ar de la droite perpendiculaire aux axes bb', dd' des deux cylindres BB' et DD';

9° Le point uu', milieu de la droite ar, $a'r'$, sera le point de tangence que l'on pourra encore obtenir et vérifier en ramenant le point u'' successivement sur A'Z', sur A''Z'' et de là sur $a'r'$, par une ligne projetante perpendiculaire au plan A''Z''.

Deuxième méthode. La plus courte distance qui existe entre les axes des deux cylindres donnés peut être obtenue, dans le cas actuel, par des considérations dépendantes de la position particulière de ces axes.

En effet, **fig. 3**, si par un point I', pris où l'on voudra dans l'espace, on conçoit les droites IV, IN, parallèles aux axes des deux cylindres CC' et DD', le plan P, qui contiendra les droites (IV, I'V') (IN, I'N'), sera parallèle aux deux cylindres, et par conséquent au plan tangent commun qui contient le point suivant lequel les deux cylindres doivent se toucher.

Or les axes cc' et dd' des deux cylindres CC' et DD' devant être également inclinés sur le plan horizontal de projection, il en sera de même des droites (IV, I'V') (IN, I'N') de la figure **3**, et le triangle IVN formé par les projections horizontales IV et IN de ces droites par la trace horizontale VN du plan P sera isocèle ; enfin les deux côtés IV, IN du triangle INV de la figure **3**, étant parallèles aux côtés nv et mv du triangle équilatéral mnv, **fig. 4**, on doit en conclure que la ligne VN perpendiculaire à la bissectrice de l'angle VIN sera, par la même raison, perpendiculaire à la ligne A'Z'.

Or les axes cc', dd' des cylindres donnés CC', DD' étant parallèles au plan tangent P, il s'ensuit évidemment que les projections verticales c' et d' de ces axes seront parallèles, et leurs plans projetants c'F'F et d'G'G étant parallèles, toute perpendiculaire G'x'' abaissée d'un point quelconque

GG′ de ces plans sur l'autre, exprimera leur distance, et par suite la plus courte distance des axes *dd′* et *cc′* des cylindres.

Cette opération détermine bien la distance des deux axes, et par conséquent les rayons des deux cylindres DD′ et CC′, mais elle ne donne pas la position du point suivant lequel les deux cylindres se touchent ; or il est essentiel de connaître cette position, puisque c'est dans le plan des trois points de tangence que doit être situé le centre de la sphère pénétrée par les trois cylindres.

Il faut donc que la perpendiculaire qui exprime la distance des deux axes soit amenée à la position qu'elle doit occuper dans l'espace.

Pour obtenir cette position, on pourra opérer de la manière suivante :

1° On déterminera la projection horizontale x''' du point x'' suivant lequel la perpendiculaire abaissée du point GG′ perce le plan projetant *c′*F′F qui contient l'axe *cc′* du cylindre CC′ ;

2° On fera mouvoir cette perpendiculaire Gx''' parallèlement à elle-même et de manière que le point GG′ ne quitte pas l'axe *dd′* du cylindre DD′ ;

3° Par suite de ce mouvement, le point $x'''x'''$ décrira dans l'espace une droite $x'''x$ parallèle à *dd′*, et lorsque le plan x''' sera venu se placer en xx' sur l'axe *cc′* du cylindre CC′, la droite zx parallèle à la ligne A′Z′ sera la projection horizontale de la perpendiculaire commune aux axes des deux cylindres CC′ et DD′ ; puis les verticales projetantes élevées par les points z et x détermineront les projections verticales z' et x' des mêmes points sur les projections verticales des axes des deux cylindres.

Vérification. Une remarque importante et de laquelle doit résulter pour la suite de cette épure un grand nombre d'abréviations, c'est qu'il est évident que les trois cylindres sont groupés autour de la verticale qui contient le centre du triangle équilatéral *mnv*, de manière que si l'on faisait faire à ces trois cylindres un tiers de révolution dans le sens indiqué par la flèche *i*, le cylindre BB′ viendrait prendre exactement la place du cylindre CC′, tandis que celui-ci remplace-

ndre DD′ ; or la perpendiculaire *ar* qui mesure la
deux axes étant entraînée par le même mouve-
t se placer en *st*, et le point de tangence *u* en

it encore tourner le tout de 120 degrés,
t *xz* et le point de tangence *e* se place-

esurent les plus courtes distances
ont pour projections horizon-
le équilatéral ; et les milieux
projections horizontales des

s points suivant lesquels
des cylindres déter-
s *a′r′*, *s′t′* et *z′x′* des mêmes
, *e′* et *o′* des trois points de tan-
situés tous les trois dans le plan hori-

ns des cylindres. Les axes et les rayons des
res étant connus, il sera facile d'obtenir leurs projec-
ions. L'un des moyens les plus simples sera de construire les deux projections d'une sphère inscrite dans chacun des cylindres demandés.

Le rayon de cette sphère étant égal à E*u″*, on prendra pour centre un point quelconque sur l'axe du cylindre dont on voudra obtenir la projection.

Traces des cylindres. La droite *hk* sera le grand axe, et la droite *el* sera le petit axe de chacune des ellipses qui forment les traces horizontales des trois cylindres.

On n'a pas construit les traces verticales qui n'offrent pas d'intérêt dans la question actuelle.

Projections de la sphère. Le rayon étant donné, on prendra pour centre le point OO′, situé à égale distance des trois points de tangence, et dans le plan LU de ces points.

Pénétrations dans la sphère. On construira d'abord les deux courbes suivant lesquelles la sphère est pénétrée par le cylindre BB′. Il suffira pour obtenir ces courbes de couper le cylindre et la sphère par des plans parallèles au plan vertical de projection. Chacun de ces plans coupera le cylindre

suivant deux génératrices, et la sphère suivant un cercle parallèle au plan vertical de projection. Les points suivant lesquels ce cercle sera rencontré par les génératrices du cylindre appartiendront aux courbes de pénétration demandées (728).

Cette opération est tellement élémentaire, que je n'ai pas cru devoir en conserver la trace sur l'épure principale, et je me suis contenté de la rappeler au lecteur par la figure 1, qui contient les mêmes données sur une plus petite échelle.

Si par le point O de cette figure on construit le plan P perpendiculaire au cylindre BB′, il est évident que ce plan coupera la sphère et le cylindre en deux parties symétriques, et l'on sait que lorsqu'un plan de symétrie est perpendiculaire au plan de projection les parties symétriquement placées dans l'espace ont des projections symétriques, ce qui explique pourquoi les deux courbes de pénétration MM′ et NN′ ont des projections M′ et N′ symétriques.

Cette remarque permettra de vérifier les courbes de pénétration en s'assurant que sur la projection verticale, les points symétriques sont bien exactement placés à égale distance du plan P, sur les projections verticales des génératrices du cylindre.

De plus, si l'on fait tourner le cylindre BB′ autour de l'horizontale projetante du point OO′ jusqu'à ce qu'il soit venu prendre la position B″ et de manière que les deux cylindres B′ et B″ soient placés symétriquement par rapport au plan horizontal P_1 il évident que les courbes N′ et U′ seront symétriques et qu'elles auront par conséquent la même projection horizontale N ; mais les deux courbes M et N étant symétriques par rapport au plan vertical P_2 leurs projections horizontales sont symétriques ; donc la projection horizontale de la courbe U′ étant égale à celle de la courbe N, sera symétrique de la courbe M.

Ainsi les courbes de pénétration de la sphère et du cylindre BB′ auront des projections verticales M′ et N′ symétriquement placées par rapport au plan P, et les projections horizontales M et N des mêmes courbes seront également symétriques par rapport au plan P_2 ce qui permettra de vérifier l'exactitude des projections horizontales, comme la symétrie par

rapport au plan P sert à vérifier les projections verticales.

C'est principalement pour déterminer les courbes de pénétration de la surface sphérique et des deux autres cylindres que la symétrie nous sera d'une grande utilité.

En effet, si l'on voulait employer la méthode précédente, il faudrait construire une projection auxiliaire, sur un plan vertical parallèle à chacun des cylindres donnés ; mais nous avons déjà remarqué que les trois cylindres sont groupés autour de l'axe, de manière qu'en faisant faire à ces trois cylindres un tiers de révolution, chacun d'eux viendrait occuper exactement la place du cylindre qui le prècède, et serait à son tour remplacé par le cylindre qui le suit.

Or ce que nous venons de dire des cylindres s'appliquerait également aux courbes de pénétration ; de sorte qu'en faisant tourner les trois cylindres de 120 degrés, chaque point des deux courbes précédemment obtenues, **fig. 4**, décrirait également un arc de 120 degrés, et le plan P_2 tournant en même temps, viendrait prendre la place du plan P_3 ; ainsi, pour obtenir les courbes de pénétration de la sphère par le cylindre CC' :

1° On décrira du point O comme centre, un arc de cercle passant par chacun des points des courbes de pénétration de la sphère et du cylindre BB' ;

2° On prendra les longueurs des arcs compris entre ces points et le plan P_2 et l'on reportera ces mêmes arcs sur les circonférences correspondantes à partir du plan P_3 ;

3° Enfin, en portant les mêmes distances à partir du plan P_4 on obtiendra les projections horizontales des deux courbes de pénétration de la sphère du cylindre DD'.

Lorsque les projections horizontales des quatre dernières courbes seront déterminées, on obtiendra leurs projections verticales en élevant, par chaque point, une perpendiculaire à A'Z', jusqu'à ce que ces perpendiculaires rencontrent les horizontales menées par les projections verticales des points correspondants que l'on aura pris la précaution de numéroter.

737. Symétrie. Les nombreuses relations de symétrie qui existent dans l'épure précédente peuvent donner lieu à quelques remarques utiles.

On a dit que *deux objets, deux corps symétriques devaient avoir une base commune, et être construits semblablement, l'un au-dessus du plan de cette base, l'autre au-dessous, avec cette condition que les sommets des angles solides homologues seraient situés à égale distance du plan de la base sur une même droite perpendiculaire à ce plan.*

Cette définition n'est point exacte ; d'abord parce qu'il n'est pas nécessaire que les deux corps dont il s'agit aient une base commune. Il est évident qu'ils pourraient être placés à une certaine distance l'un de l'autre, de manière que les sommets homologues soient situés deux à deux sur une perpendiculaire à un même plan, et à égale distance de ce plan, qui devient alors un *plan de symétrie*. Mais encore il est bien évident que cette dernière condition n'est pas nécessaire pour établir la symétrie des deux corps dont il s'agit ; et l'on conçoit parfaitement que deux corps *composés de parties égales arrangées dans un ordre inverse* seront symétriques dans leurs formes quoiqu'ils ne soient pas placés symétriquement.

Il faut donc distinguer la *symétrie de forme* de la *symétrie de position*.

Cette dernière espèce de symétrie est évidemment la seule qui convienne pour les figures planes ; en effet, si deux figures de cette espèce, deux triangles par exemple, sont placés comme on le voit sur la figure 7, on ne peut pas dire que ces deux triangles soient symétriques ; car si l'on joint par une droite deux quelconques de leurs sommets homologues, et si par le milieu de la droite *ab* on lui élève une perpendiculaire *cd*, cette dernière ligne sera un *axe de symétrie* ; or, si l'on fait tourner le triangle A autour de la droite *cd*, on fera coïncider les deux triangles, et leur égalité deviendra évidente. On ne doit donc pas dire que ces deux triangles sont des figures symétriques ; ce sont des *figures égales placées symétriquement*.

Aux symétries de forme et de position on pourrait ajouter une troisième sorte de symétrie, que l'on nommerait *symétrie de projection*.

En effet, pour qu'un objet symétrique se projette symétriquement, il faut que le plan de projection soit perpendicu-

laire au plan de symétrie ; et, dans ce cas, on a une vue de face comme celle que l'on obtient lorsque la surface d'un portrait est perpendiculaire au plan de symétrie du corps humain ; tandis que si ce dernier plan était parallèle à celui du tableau, on aurait évidemment ce que l'on appelle un profil.

Si les deux polyèdres A et B, **fig. 6**, sont placés symétriquement par rapport au plan vertical, il est évident que leurs projections horizontales seront symétriques par rapport à la trace horizontale du plan P, qui alors est un axe de symétrie pour ces deux projections; et l'on conçoit que l'un des deux polyèdres pourrait s'élever jusqu'en A′ sans que la symétrie cessât d'exister sur la projection horizontale.

Enfin, cette symétrie de projections existerait encore si le polyèdre B était remplacé par un polyèdre C différant complétement du premier, mais dont les sommets seraient situés sur les mêmes perpendiculaires projetantes.

738. Problème. *Intersection d'une sphère et d'un cône.*

Supposons qu'il s'agisse, **fig. 375, pl. 78**, de trouver la courbe d'intersection d'une sphère par un cône qui aurait pour sommet le centre de la sphère.

On coupera, comme nous l'avons fait au n° 576, les deux surfaces proposées par des plans verticaux passant par le sommet du cône. Tous ces plans, contenant le centre de la sphère, couperont cette surface suivant des grands cercles dont on évitera la projection elliptique en les rabattant autour de la verticale projetante du centre de la sphère.

Ainsi, par exemple, pour avoir le point où la génératrice *s*-1 perce la sphère, on concevra le plan vertical projetant de cette ligne ; la section dans la sphère sera un grand cercle qui, étant rabattu autour de la verticale du point *ss′*, viendra se confondre avec la projection du méridien principal. La génératrice *s*-1 se rabattra en *s*-1″, et l'intersection de cette droite avec le grand cercle *vu* donnera le point *m″*, qui, ramené à sa place, deviendra *m*, *m′*.

La même opération étant recommencée pour toutes les génératrices du cône, on obtiendra les deux courbes *ac*, *a′c′*

pour les projections de la ligne de pénétration du cône dans la sphère.

Si l'on veut construire cette courbe dans le développement de la surface du cône, on remarquera d'abord que, puisqu'elle appartient à la surface de la sphère, tous ses points sont à égale distance du point ss' sommet du cône.

De plus, chaque élément infiniment petit de la courbe que nous venons d'obtenir peut être considéré comme situé dans un plan tangent à la surface de la sphère, et par conséquent la courbe d'intersection rencontre partout à angle droit les génératrices du cône, puisque ces lignes sont des rayons de la sphère.

Si l'on éloignait le sommet jusqu'à l'infini, le cône se changerait en un cylindre, la sphère en un plan, et par conséquent la courbe deviendrait plane et représenterait la section droite du cylindre. Ainsi, la courbe ac, $a'c'$ est pour le cône ce que la section droite est pour le cylindre.

Tous les points de la courbe que nous venons d'obtenir étant à égale distance du sommet du cône, si l'on conçoit cette courbe partagée en un grand nombre d'arcs très-petits, et que par les points de division on fasse passer des génératrices du cône, on pourra sans erreur sensible regarder la portion de surface conique comprise entre deux génératrices consécutives et le petit arc correspondant, comme un triangle isocèle, de sorte qu'en plaçant ces petits triangles à côté les uns des autres, leur ensemble formera un secteur de cercle. De là résulte la construction suivante :

Du point s' avec un rayon égal à $s'a'$, on décrira l'arc de cercle $m^{IV}\,om^{IV}$ sur lequel on portera la longueur véritable de la courbe à double courbure obtenue précédemment, et le secteur $s'm^{IV}\,om^{IV}$ sera le développement de la portion de cône comprise entre le sommet et la courbe ac, $a'c'$.

Pour avoir la longueur de l'arc $m^{IV}m^{IV}$, on développera le cylindre projetant de la courbe ac, $a'c'$ (459), ce qui donnera la courbe $m'''om'''$; on portera les arcs qui composent cette courbe à la suite les uns des autres sur le cercle $m^{IV}m^{IV}$, ce qui déterminera le secteur formant le développement du cône.

En portant ensuite sur chaque rayon prolongé la véritable

grandeur de la partie de la génératrice correspondante, on construira facilement la courbe $1'''$-z-$1'''$ qui représente le développement de la trace horizontale du cône.

739. Problème. On peut encore employer la même disposition d'épure pour obtenir *l'intersection d'une sphère avec un cône quelconque.*

On prendra l'un des plans de projection, **fig. 379**, perpendiculaire à la droite K qui contient le centre C de la sphère et le sommet S du cône. Le second plan de projection sera parallèle à la même droite qui alors sera projetée par une perpendiculaire à la ligne AZ.

On construira les deux projections de la courbe directrice de la surface conique et l'on opérera pour le reste comme dans l'exemple précédent.

Ainsi un plan P_1 contenant la droite CS, coupera la sphère suivant un méridien, et le cône suivant deux génératrices S-1, S-2, qui rabattues en S-$1''$ et S-$2''$ sur le plan du méridien principal P_2 donneront deux points m'' et n''. On ramènera ces points en mm' et nn', et ainsi de suite, pour tous les autres points de la courbe demandée.

740. Toutes les fois que le cône sera circulaire et que son axe passera par le centre de la sphère, **fig. 376**, la ligne de pénétration sera un cercle.

Si le sommet est en dehors de la sphère, il y aura deux cercles de pénétration, **fig. 377**, et si le sommet s'éloignait jusqu'à l'infini, le cône se changerait en un cylindre et les deux cercles deviendraient égaux.

D'où il résulte que lorsque l'axe d'un cylindre circulaire passe par le centre de la sphère, les lignes de pénétration sont deux cercles égaux et parallèles.

741. Il n'est pas toujours nécessaire que le cône et le cylindre soient circulaires et que leurs axes passent par le centre de la sphère pour que les lignes de pénétration soient des cercles. Ainsi, nous avons démontré au n° 208 que, dans tous les cas, lorsque l'une des courbes de pénétration est un cercle, la seconde courbe de pénétration est aussi un cercle.

742. Le principe que nous venons de rappeler donne quelquefois lieu à des abréviations. Ainsi, par exemple, **fig. 373**, A et A′ étant les deux projections d'un hémisphère creux, si l'on proposait de construire la pénétration de cet hémisphère par un cylindre oblique, ayant pour directrice le grand cercle *ac* et pour génératrice la droite *vu*, *v′u′*, on construirait la projection auxiliaire A″, sur laquelle la courbe de pénétration *m′n′m′* se projetterait par une ligne droite *m″n″*. Il serait ensuite facile de construire cette courbe sur les deux projections en ramenant chacun de ses points ou en cherchant les axes.

743. Problème. *Construire l'intersection d'une ligne courbe avec la surface d'une sphère.*

On emploiera, **fig. 374**, comme surface auxiliaire un cylindre C, perpendiculaire au plan horizontal et contenant la courbe donnée *aa′*. Cette surface, qui n'est autre que le cylindre projetant de la ligne donnée, coupera la sphère suivant une courbe à double courbure, dont la projection horizontale se confondra avec celle de la courbe *a*, et dont la projection verticale *b′* sera coupée par la projection verticale de la ligne donnée en deux points (*m′*, *m′*,) qui seront les projections verticales des points demandés (*m*, *m′*) (*m*, *m′*).

Pour construire la projection verticale de la ligne *bb′*, on élèvera des perpendiculaires par les points suivant lesquels la trace du cylindre C coupe les projections horizontales des parallèles de la sphère.

Si quelques-uns de ces cercles étaient rencontrés trop obliquement par la projection de la courbe donnée, on pourrait employer des sections méridiennes de la sphère.

Ainsi, par exemple, la verticale projetante du point *m* coupe la section méridienne *op* en deux points, qui, rabattus dans le plan du méridien principal, deviennent *m″m″*.

Ramenant ensuite ces points à leur place, on obtient *m′m‴*.

744. On pourrait encore employer comme surface auxiliaire un cône qui aurait pour sommet le centre de la sphère et pour directrice la courbe donnée. Dans ce cas, on obtiendrait

l'intersection du cône avec la sphère en opérant comme nous l'avons fait au numéro 738.

745. *Raccordement de la sphère avec le cylindre et le cône.*

Pour qu'une sphère se raccorde avec un cône ou un cylindre il faut :

1° Que le cône ou cylindre soit circulaire ;

2° Que leur axe passe par le centre de la sphère ;

3° Que la génératrice du cône ou du cylindre soit tangente à la sphère.

La ligne de raccordement d'un cylindre avec la sphère, **fig. 372**, sera toujours un grand cercle *zx* ; et la ligne de raccordement de la sphère et du cône sera un petit cercle *vu*, **fig. 371**.

746. Épicycloïde sphérique. Soient, **fig. 380, pl. 79**, deux cônes circulaires (A, A′) (B, B′) ayant pour sommet commun le point *ss′*, et pour bases les deux circonférences (*a*-15) (*a′*-15) et (15-*c′*) (15-*c*) tangentes au point 15.

Si l'on fait rouler le cône BB′ sur le cône immobile AA′, chacun des points de la circonférence (*c*-15) (*c′*-15) décrira une courbe à laquelle on donne le non d'*épicycloïde sphérique*. On demande de construire les projections de l'une de ces courbes.

On prendra pour l'un des deux plans de projection celui qui contient la base du cône immobile. On fera tourner le cercle générateur autour de l'horizontale projetante du point *cc′*, et lorsque ce cercle sera rabattu sur le plan horizontal *c′*-15′, on le partagera en un nombre quelconque de parties égales, en 16 par exemple. On ramènera le cercle générateur à sa place, et l'on déterminera bien exactement chaque point de division sur les deux projections 15-*c*, 15-*c′*.

Enfin, on portera tous les arcs égaux du cercle générateur à la suite les uns des autres sur la circonférence du cercle immobile.

Cela étant fait : proposons-nous de construire la courbe engendrée par le point 1. Nous choisirons ce point de préférence, afin que la projection de courbe cherchée ne se confonde pas avec les opérations précédentes.

Si nous supposons que l'on fasse rouler le cône incliné dans le sens indiqué par la flèche, les différents points de division du cercle 15-*c*, 15-*c'*, viendront successivement toucher les points correspondants de la base du cône immobile, et le centre *oo'* du premier cercle parcourra dans l'espace un arc projeté sur le plan horizontal par la circonférence *oo''* et sur le plan vertical par la droite *oo'*.

Lorsque le point 2 viendra toucher la circonférence du cercle immobile, le point 1 sera placé, par rapport au point 2, comme le point 14 était placé par rapport au point 15, au moment où les axes des deux cônes étaient dans un même plan parallèle au plan vertical de projection. De sorte que pour obtenir le point 1' on décrira du point *s*, comme centre, la circonférence 14-*v'*, puis avec le compas on fera l'arc de cercle *v'*-1' égal à *v*-44.

Pour déterminer le point 1'' on décrira la circonférence 13-*u'*, et l'on fera l'arc *u'*-1'' égal à *u*-13.

En continuant à opérer de la même manière, on obtiendra tous les points de la courbe demandée, quelle que soit la position du cercle mobile.

Le point générateur ne quitte pas la surface d'une sphère qui a pour rayon la droite *s'*-15, génératrice commune des deux cônes ; c'est pourquoi la courbe obtenue se nomme *épicycloïde sphérique* pour la distinguer de l'*épicycloïde plane* que nous avons étudiée au n° 352.

747. Si le sommet commun aux deux cônes s'éloignait du plan horizontal *a*-15, la courbure de la sphère diminuerait, et lorsque le centre serait parvenu jusqu'à l'infini, la surface de la sphère serait plane, les deux cônes seraient remplacés par deux cylindres circulaires, et la courbe engendrée serait une épicycloïde plane.

748. Pendant que chacun des points de la circonférence (15-*c*)(15-*c'*) décrit une épicycloïde sphérique, tous les autres points situés dans le même plan décrivent des *épicycloïdes rallongées* ou *raccourcies*, suivant qu'ils sont en dehors ou en dedans de la circonférence mobile.

Proposons-nous, par exemple, de déterminer la position que doit occuper le point 17, lorsque le point 1, générateur de l'épicycloïde, sera parvenu en $1'''$.

Nous remarquerons d'abord qu'à l'instant dont il s'agit les deux cercles se touchent par le point 6 ; mais pour que ce point vienne remplacer le point $15''$ dans le rabattement, il faut que le point 1 prenne la place du point 10, et dans ce cas, le point 17, ramené en $17'$, aura pour projections les deux points $17''$, $17''$. De sorte que pour obtenir le point demandé on décrira la circonférence $17''$-x et l'on fera l'arc de cercle x'-$17'''$, égal à x-$17''$. En opérant de la même manière on obtiendra tous les points de l'épicycloïde sphérique rallongée.

Par des constructions analogues on obtiendra le point $18'''$ qui appartient à l'épicycloïde raccourcie engendrée par le point 18. Si on a bien opéré, les quatre points o'', $18'''$, $1'''$, $17'''$, doivent être sur un même rayon o''-$1'''$ du cercle mobile.

749. *Tangentes à l'épicycloïde sphérique.*

1re *méthode.* Lorsque le cercle mobile devient tangent au point 6, le point générateur se meut pendant un instant très-court comme s'il tournait autour du point de tangence des deux cercles. De sorte que l'on peut considérer l'arc infiniment petit, qui est dans le voisinage du point $1'''$, comme s'il était situé sur la surface d'une sphère qui aurait son centre au point 6, et dont le rayon serait la droite 6-$1'''$. De plus, ce même arc appartient à la sphère qui a pour rayon le côté s-$1'''$ du cône mobile ; il fera donc partie de l'intersection de ces deux sphères, et la question sera réduite à construire une tangente à cette intersection.

Voici l'ordre des opérations ; on construira (694) : 1° la droite pq, trace horizontale du plan qui toucherait au point $1'''$ la sphère qui a pour rayon s-$1'''$.

2° La droite pg, trace horizontale du plan tangent à la sphère qui a pour rayon 6-$1'''$.

3° La droite p-$1'''$, intersection des deux plans tangents et qui sera par conséquent tangente à l'épicycloïde.

750. 2e *méthode.* La tangente à une courbe quelconque

tracée sur la surface d'une sphère, devant être perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui passe par le point de tangence, la ligne demandée, intersection des plans tangents aux deux sphères qui ont pour rayons les droites s-1‴, 6-1‴, sera pependiculaire à chacune de ces deux lignes, et par conséquent au plan qui les contient. Ainsi, au lieu de chercher, comme nous venons de le faire, les traces des deux plans tangents au point 1‴, il sera plus simple d'opérer de la manière suivante :

1° On construira la droite $s'z'$ suivant laquelle le plan des rayons s-1‴, 6-1‴ est coupé par le plan 15-s-a, parallèle au plan vertical de projection.

La ligne $s'z'$ sera parallèle à la trace verticale du plan s'-1‴-z', et la droite $p'm'$ perpendiculaire sur $s'z'$ sera par conséquent la projection verticale de la tangente.

2° On construira la droite 6-y, trace horizontale du plan s-1‴-6, et la ligne pm, perpendiculaire sur 6-y, sera la projection horizontale de la tangente.

Les tangentes aux épicycloïdes rallongées ou raccourcies s'obtiendront par des considérations de même nature.

Ainsi, pour la tangente au point 17‴ de l'épicycloïde rallongée, on construirait la perpendiculaire au plan qui contiendrait les deux rayons s-17‴, 6-17‴, et pour la tangente au point 18‴ de l'épicycloïde raccourcie, on construirait la perpendiculaire au plan des rayons s-18‴, 6-18‴.

751. La figure **384** contient les deux projections de l'épicycloïde sphérique que l'on obtient lorsque le cercle mobile est perpendiculaire au plan du cercle directeur, et dans les figures **282, 283**, on a supposé que l'un des deux cônes était remplacé par un plan.

LIVRE III.

CHAPITRE PREMIER.

Considérations générales sur les surfaces courbes.

752. En jetant un coup d'œil sur les questions diverses dont nous nous sommes occupés jusqu'à présent, il sera facile de rattacher nos idées à un petit nombre de principes généraux.

Dans le premier livre nous avons étudié les surfaces planes, et dans le second nous avons vu les surfaces cylindriques, coniques et sphériques.

753. Chaque surface a été considérée comme engendrée par le mouvement d'une ligne assujettie à se mouvoir suivant des conditions données, *l'énoncé de ces conditions formant la définition de la surface.*

Ainsi le plan est engendré par le mouvement d'une droite qui se meut parallèlement à elle-même, en s'appuyant toujours sur une autre droite immobile dans l'espace. La droite mobile se nomme la génératrice, et la droite sur laquelle elle s'appuie a reçu le nom de directrice. Si nous remplaçons cette dernière ligne par une courbe, nous obtenons une surface cylindrique ; et si, au lieu du parallélisme des génératrices, nous les faisons concourir en un même point, nous avons une surface conique.

754. Au reste, nous n'avons admis ces divers modes de génération que pour plus de simplicité, mais l'on n'est pas nécessairement contraint de s'y assujettir. En général, toute ligne, droite ou courbe, que l'on ferait mouvoir d'après des conditions telles que dans toutes ses positions elle serait toujours située dans une certaine surface, pourrait être regardée comme la génératrice de cette surface. Ainsi, par exemple, on pourrait encore engendrer le plan par une ligne droite qui tournerait autour d'une autre droite immobile, avec laquelle elle ferait constamment un angle droit. La droite fixe se nommerait l'axe du plan. Dans cette génération, qui a de l'analogie avec celle du cône, la droite génératrice changeant à chaque instant de direction dans l'espace, cette dernière condition eût été moins facile à représenter sur les épures que le parallélisme des génératrices ; c'est pourquoi ce dernier mode de génération a été préféré. On peut engendrer le cylindre en supposant qu'une courbe quelconque se meut parallèlement à elle-même, en s'appuyant toujours sur une ligne droite qui devient la directrice.

Pour le cône, on peut supposer qu'une courbe glisse parallèlement à elle-même en suivant toujours une droite directrice, de manière que, sans changer de forme, la courbe génératrice varie de grandeur proportionnellement à sa distance au sommet. Enfin, au lieu de considérer la sphère comme provenant du mouvement d'un grand cercle qui tourne autour de son diamètre, on peut supposer qu'un cercle variable de grandeur se meut parallèlement à lui-même, de manière que son centre parcoure une ligne droite, et qu'en nommant R le rayon de la sphère que l'on veut engendrer, r le rayon du cercle générateur, et d la distance de son plan au centre de la sphère, on ait

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

755. Il résulte de ce que nous venons de dire, qu'une surface peut être engendrée de plusieurs manières, et que l'on est libre de choisir celle de ces générations qui convient le mieux soit pour la représentation de la surface sur les épures, soit pour la solution des divers problèmes qui en dépendent.

756. J'ai cru devoir commencer par appeler l'attention du lecteur sur les surfaces cylindriques, coniques et sphériques, parce qu'elles sont la base essentielle de presque toutes les combinaisons de l'industrie.

Nous allons actuellement considérer les surfaces courbes sous un point de vue plus général.

757. Quoique la courbure des surfaces puisse être variée d'une infinité de manières, on peut cependant renfermer tous les cas particuliers dans une même définition, en supposant que *toute surface est engendrée par le mouvement d'une ligne quelconque, droite ou courbe, plane ou à double courbure, constante ou variable de forme, et qui se meut suivant des conditions données.*

Si, par exemple, nous faisons tourner l'ellipse $a'o'u'$, **fig. 385, pl. 80**, autour de la droite verticale $c'o'$, elle engendrera une surface que nous nommerons *ellipsoïde de révolution.*

758. Si nous supposons que l'axe horizontal au varie de longueur pour chaque position nouvelle de l'ellipse mobile, nous obtiendrons une infinité de surfaces différentes.

759. Introduisons la condition que les deux points a, u ne quittent pas la circonférence de l'ellipse horizontale $avux$, alors la surface engendrée prendra le nom d'*ellipsoïde à trois axes* pour la distinguer de l'ellipsoïde de révolution.

760. Nous obtiendrons encore la même surface en supposant qu'une ellipse horizontale telle que $avux$, **fig. 387**, s'élève parallèlement à elle-même en variant de grandeur à chaque position, pourvu que le rapport des axes ne change pas, et que le plus grand de ces deux axes soit toujours égal à l'une des cordes horizontales de l'ellipse $a'o'u'$.

Ces différents modes de génération reviennent à considérer la surface comme le lieu géométrique qui contient un système de lignes données.

761. La topographie nous fournira un exemple remarquable de ce genre de définition.

Supposons que l'on veuille déterminer, **fig. 386**, tous les innombrables contours et sinuosités d'un pays de montagnes, on supposera le terrain coupé par une suite de plans horizontaux, et l'on construira les projections horizontales des sections obtenues.

Il est évident que l'on pourra éviter la projection verticale en exprimant par des nombres la hauteur de chaque plan coupant (241).

Ainsi la courbe désignée par le chiffre 15 sera la section du terrain par un plan horizontal élevé à 15 mètres au-dessus du niveau de la mer ; la courbe désignée par le nombre 20 sera la section à 20 mètres de hauteur, etc.

Il serait facile d'augmenter l'exactitude en projetant des sections plus rapprochées.

762. Le lecteur comprendra de suite tout le parti que l'on peut tirer d'une représentation aussi complète de la surface terrestre.

Supposons qu'il s'agisse de tracer une route suivant la direction *ba*, on coupera la surface par le plan vertical, qui a pour trace cette ligne, et la section transportée, **fig. 388**, donnera les différences de niveau de tous les points de la ligne que doit parcourir la route projetée.

Si la projection horizontale de cette route était une courbe *cd*, on développerait, **fig. 389**, le cylindre projetant de cette ligne.

Ces exemples suffisent pour faire comprendre la possibilité de représenter toutes les surfaces courbes, quelque nombreux que soient les accidents et sinuosités de leurs contours. Nous allons diriger plus particulièrement notre attention sur les surfaces employées dans les arts, et dont la génération résulte par conséquent du mouvement de certaines lignes définies.

763. L'idée la plus simple a dû être de classer les surfaces d'après la nature des opérations nécessaires pour les produire.

Ainsi, par exemple, on a nommé *surfaces de révolution* celles qui s'exécutent sur le tour, et *surfaces réglées* celles dont l'exécution est obtenue par la règle.

Si à ces deux genres de surfaces nous ajoutons les *surfaces enveloppes*, nous aurons toutes les espèces différentes de surfaces courbes employées dans les travaux de l'industrie.

Nous étudierons bientôt en particulier chacun des genres de surfaces que nous venons d'énoncer, mais auparavant nous allons présenter quelques idées générales sur l'ordre que nous devons suivre dans cette étude.

764. Le mode de génération d'une surface étant adopté, il faut savoir, pour chaque cas particulier, répondre aux questions suivantes :

1° *Représenter sur l'épure la surface dont la définition est donnée ;*

2° *Exprimer qu'un point ou une ligne fait partie de la surface donnée ;*

3° *Développer* (autant que possible) *la surface donnée en tout ou en partie ;*

4° *Mener à la surface donnée des plans tangents, des normales et des surfaces normales ;*

5° *Trouver l'intersection de la surface donnée, par un plan ;*

6° *Trouver la courbe d'intersection de la surface donnée avec toute autre surface ;*

7° *Trouver l'intersection de la surface donnée par une ligne quelconque, droite ou courbe.*

765. Pour représenter sur l'épure une surface dont la définition est donnée, il suffit de savoir construire la génératrice de cette surface dans une position quelconque.

Quelquefois la surface est infinie dans ses deux dimensions, comme le plan en général et les cylindres et cônes qui ont pour directrices des courbes infinies ; d'autres fois elle n'est infinie que dans un sens, comme le cylindre et le cône, lorsque leur directrice est une courbe fermée ; enfin elle peut être finie en tous sens, comme la surface de la sphère.

766. En construisant un certain nombre de génératrices, et sur chacune d'elles les points où elle perce les plans de projection, on obtient les traces de la surface.

767. Lorsque la surface est limitée, on doit construire la ligne qui limite sa projection ; on obtient cette courbe en cherchant la suite des points suivant lesquels la surface donnée est touchée par une autre surface perpendiculaire au plan de projection. Ainsi, dans les cylindres et cônes, les limites sont situées dans des plans tangents aux courbes directrices, et perpendiculaires aux plans de projection. La limite de la projection de la sphère est la trace d'un cylindre perpendiculaire au plan de projection et enveloppant la sphère.

768. Pour mieux faire sentir la forme d'une surface, on a tracé en plein les lignes vues, et en ponctué les lignes cachées.

On a cru cependant devoir s'écarter de cette convention à l'égard du plan, qui, n'ayant pas d'épaisseur, n'est plus qu'une conception géométrique, incapable par conséquent de cacher les objets qui sont placés derrière. D'ailleurs étant infini en tous sens, un seul plan oblique aux deux plans de projection eût caché entièrement toutes les autres parties de l'épure, ce qui aurait empêché de faire sentir la position des corps solides, en ne permettant plus d'appliquer à leurs arêtes, ou autres parties de leurs surfaces, la distinction des lignes vues et des lignes cachées ; et si dans les sections de ces mêmes surfaces on a tracé en points les parties situées au delà des plans coupants, c'est plutôt parce que l'on a considéré ces parties comme supprimées, que comme cachées par ces plans.

769. Dans beaucoup de problèmes on a placé les données dans une position inclinée par rapport aux plans de projection, mais on ne l'a fait que pour exercer davantage aux constructions graphiques. Dans les applications, on devra toujours, avant tout, choisir le système de plans coordonnés ou de plans auxiliaires sur lesquels les projections seraient les plus simples, et pourvu que l'on ne change rien aux données ni à leur position relative, la généralité de la question ne sera pas moins complète. Il ne faut pas oublier surtout, que *le choix des plans de projection est une des parties les plus essentielles de la solution des problèmes.*

770. Pour exprimer qu'un point fait partie d'une surface, on place ce point sur l'une des génératrices, ou sur toute autre ligne située dans cette surface, et dont on sait construire les projections: en agissant de la même manière à l'égard de tous les points d'une courbe, on exprime que cette courbe est située dans la surface.

771. Pour exécuter un corps solide quelconque, il faut tracer sur la pierre, le bois ou le métal dont ce corps doit être composé, toutes les lignes qui doivent diriger le travail de l'ouvrier.

Ces lignes se déduiront de leurs projections, par des rabattements si elles sont planes, et par des développements si elles font partie de surfaces courbes.

Nous avons pu développer les surfaces des polyèdres, cylindres et cônes ; mais pour la sphère, son développement n'a été obtenu qu'approximativement. Nous verrons plus tard quel est le caractère auquel on reconnaît en général qu'une surface peut se développer.

772. Dans les questions où il s'agissait de construire des plans tangents au cylindre et au cône, nous avons considéré la génératrice de tangence comme provenant du rapprochement des deux génératrices de section.

Cette relation n'est qu'un cas particulier d'une autre proposition plus générale que nous allons démontrer.

773. Supposons, **fig. 390**, qu'une surface courbe quelconque A soit coupée par un plan pq. Si nous faisons tourner ce plan autour de la droite mn, qui touche en a la courbe de section ac, cette dernière ligne deviendra successivement ac', ac'', et lorsque tous ses points seront réunis en un seul, le plan coupant pq deviendra $p'q'$ et touchera la surface suivant le point a.

774. On peut donc conclure de ce qui précède qu'un point de tangence est un point *multiple*, puisqu'il résulte du rapprochement d'une infinité de points de section.

775. Ces points, quoique infiniment rapprochés, déterminent la position du plan tangent $p'q'$, mais ne suffisent pas pour le construire.

Si l'on veut obtenir les traces, il sera nécessaire d'introduire quelque autre condition facile à exprimer graphiquement.

776. Concevons par le point a, **fig. 392**, une courbe $ao''o'o$ quelconque située sur la surface, et supposons que cette courbe soit coupée par le plan pq suivant le point o, la droite as, qui joindra ce point avec le point a, sera une sécante par rapport à la courbe $ao''o'o$.

Or, si nous faisons tourner le plan pq autour de mn qui touche la surface au point a, le point o deviendra successivement o', o'', a.

Enfin, lorsque les points de section o'' et a seront réunis, le plan $p'q'$ sera tangent au point a, et la sécante as deviendra as''' tangente à la courbe $ao''o'o$, sans avoir cessé un seul instant d'appartenir au plan pq dans les diverses positions par lesquelles ce plan a successivement passé pour devenir $p'q'$.

La courbe $ao''o'o$ pouvant être prise dans la direction que l'on voudra, il s'ensuit que *le plan tangent en un point quelconque d'une surface donnée doit contenir les tangentes à toutes les courbes que l'on peut faire passer par ce point sur la surface.*

777. Nous pouvons encore arriver à la même conséquence en raisonnant de la manière suivante :

Quand on considère une ligne courbe comme composée d'une infinité de côtés, cela ne veut pas dire que l'on soit autorisé à regarder chacun d'eux comme un point unique ; on doit plutôt admettre que ce sont de petits côtés de polygones dont les extrémités se sont tellement rapprochées, que leurs longueurs se trouvent réduites à zéro ; de sorte que la direction de chacun de ces côtés reste déterminée, et c'est le prolongement de cette direction qui produit la tangente.

778. Les mêmes raisonnements s'appliqueront aux surfaces

courbes. En considérant ces espèces de surfaces comme composées d'une infinité de petites facettes, il ne faut pas regarder chacune d'elles comme un point unique, mais comme la réunion de plusieurs points rapprochés, de manière à n'en faire qu'un seul, en conservant toutefois cette condition que tous ces points n'ont pas cessé d'être dans un même plan. De sorte que si l'on conçoit une droite passant par deux quelconques de ces points infiniment rapprochés, la direction de cette ligne n'en sera pas moins déterminée, et assujettie à se confondre avec le prolongement de la facette infiniment petite qui contient ces deux points.

Or cette facette ainsi prolongée n'est autre chose que le plan tangent ; d'où il suit que *si en un point d'une surface courbe on conçoit un plan tangent, ce plan contiendra les tangentes à toutes les courbes qui dans la surface passeraient par le point de tangence.*

779. Les considérations qui précèdent étant admises, la construction des plans tangents en un point d'une surface courbe se réduit aux deux opérations suivantes, **fig. 395** :

1° *Construire par le point donné deux tangentes à la surface ;*

2° *Faire passer un plan par ces deux droites.*

Il n'y a plus pour chaque cas particulier qu'à choisir, parmi toutes les courbes qui passeraient par le point donné, celles auxquelles il est le plus facile de mener des tangentes.

780. *Lorsqu'une ligne droite est située tout entière dans une surface courbe, elle peut être prise pour une tangente à cette surface.*

Car on peut la considérer indifféremment comme une courbe dont le rayon serait infini, ou comme la tangente à cette courbe.

C'est ainsi que pour construire les plans tangents aux cylindres et cônes, nous avons regardé comme tangentes les droites génératrices de ces surfaces, de sorte qu'une seconde tangente a suffi pour déterminer le plan tangent.

Pour la sphère, le plan perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui aboutit au point de tangence, contient évidem-

ment les tangentes à tous les cercles qui passent par ce point.

781. Pour obtenir une *normale* il suffit de construire par le point de tangence une perpendiculaire au plan tangent.

782. Tout plan qui contient la normale se nomme *plan normal ;* la section de la surface par ce plan se nomme *section normale.*

783. Si l'on fait tourner le plan normal autour de la normale, on obtiendra une suite de sections dont la courbure est différente pour chacune des positions du plan coupant.

On démontre dans les traités d'Algèbre appliquée, que la section qui a le plus grand rayon de courbure est toujours perpendiculaire à celle qui a la plus petite courbure.

Quelquefois la courbure des sections normales qui passent par un point donné est constante.

C'est ce qui a lieu pour la sphère et pour quelques sections dont nous parlerons dans le chapitre suivant.

784. Pour obtenir la section d'une surface courbe par un plan, il suffit de construire la suite des points suivant lesquels ce plan coupe un système de lignes tracées sur la surface.

Il n'y a plus dans chaque cas particulier qu'à choisir le système de lignes le plus simple.

La ligne provenant de la section par un plan est toujours une courbe plane, dont la forme dépend de celle de la surface coupée.

Si l'on prend un plan de projection perpendiculaire au plan coupant, la courbe cherchée se projettera en ligne droite, ce qui abrégera beaucoup les opérations.

La véritable grandeur de la courbe s'obtient par un rabattement.

785. L'une des questions les plus importantes de la géométrie descriptive est celle qui a pour but de construire la courbe d'intersection de deux surfaces.

Il est évident que cela revient à construire un point commun aux deux surfaces données; car, en recommençant les mêmes opérations, on pourra trouver autant de points que l'on voudra, communs aux deux surfaces ; puis, l'on fera passer par tous ces points une courbe, qui sera l'intersection demandée.

Nommons en général A et B les deux surfaces données, **fig. 393**, on construira une surface auxiliaire quelconque, que nous nommerons C. Cette surface coupera la surface A suivant une ligne a, et la surface B suivant une ligne b. Or, ces deux lignes a et b étant situées dans une même surface C, se couperont en un point m, qui appartiendra aux deux surfaces proposées, puisqu'il sera en même temps sur deux lignes faisant partie de ces surfaces.

Une deuxième surface auxiliaire coupera les surfaces proposées suivant deux lignes a', b', qui, par leur intersection, donneront un point m'.

Une troisième surface donnera un point m''.

Une quatrième surface donnera un point m''', etc.

La courbe qui passera par les points m, m', m'', sera la pénétration demandée.

La solution générale étant trouvée, il ne reste plus dans chaque cas particulier qu'à choisir le système de surfaces auxiliaires, de manière que les lignes a, a', a''..... b, b', b'',... qui résultent de leur intersection avec les surfaces données, soient les plus simples possible et les plus faciles à construire.

On prendra presque toujours des plans pour surfaces auxiliaires ; quelquefois cependant il pourra être utile d'employer des cylindres, des cônes ou des sphères : tout dépendra de la nature des surfaces données ou de leur position dans l'espace.

Ainsi, pour avoir l'intersection de deux cylindres, nous les avons coupés par un système de plans parallèles à leur direction.

Pour l'intersection d'un cylindre par un cône, nous avons employé des plans parallèles au cylindre et contenant le sommet du cône ; et pour obtenir la pénétration de deux cônes, nous les avons coupés par des plans passant par les deux sommets.

Cependant il peut y avoir telle disposition d'épure où il vaudrait mieux employer des plans parallèles ou perpendiculaires aux plans de projection ; c'est ce que l'habitude des applications mettra promptement en état de décider.

786. Parmi les pénétrations de deux surfaces, nous devons surtout remarquer le cas où l'une d'elles serait perpendiculaire au plan de projection; elle devient alors la surface projetante de la courbe demandée, et sa trace en est la projection. Pour obtenir la seconde projection, il suffit d'élever des perpendiculaires à la ligne AZ, par tous les points où cette trace est rencontrée par les projections d'un système de lignes tracées dans l'autre surface.

Cette combinaison peut toujours être obtenue par un choix convenable de plans de projection, toutes les fois que l'une des deux surfaces données est un plan, un prisme ou un cylindre.

787. Nous avons vu dans le chapitre 1er du livre II comment on peut construire des tangentes aux courbes planes ; mais lorsqu'il s'agit d'une courbe à double courbure, le plus simple est de la considérer comme provenant de l'intersection de deux surfaces. Alors la question se réduit à construire par le point donné des plans tangents à ces deux surfaces, et l'intersection de ces plans est la tangente demandée.

Quoique la courbe proposée puisse provenir de l'intersection de deux surfaces courbes quelconques, on peut toujours, si cela est plus commode, se contenter de construire des plans tangents aux deux cylindres projetants, de sorte que les traces de ces plans tangents seront les deux projections de la tangente.

788. Tout plan passant par le point de tangence et perpendiculaire à la tangente sera perpendiculaire à la courbe, et prendra pour cette raison le nom de *plan normal à la courbe*.

789. La tangente étant perpendiculaire au plan normal sera perpendiculaire à toutes les droites qui passeraient par son pied dans ce plan.

Il semblerait donc permis de considérer chacune de ces lignes comme une normale à la courbe. Cela ne serait pas exact : il faut se rappeler ce que nous avons dit au n° 466, que *la normale en un point d'une courbe à double courbure doit être située dans le plan osculateur de cette courbe*. D'où il résulte que la normale sera l'intersection du plan normal par le plan osculateur.

790. Pour trouver l'intersection d'une surface B, **fig. 334**, par une ligne quelconque *a*, on fera passer par cette ligne une surface auxiliaire que nous nommerons C. Cette surface contiendra le point cherché *m*, et comme ce point doit faire partie de la surface donnée B, il sera sur la ligne *b*, provenant de l'intersection des surfaces B et C.

Or, le point *m* devant être à la fois sur les lignes *a* et *b*, sera où elles se coupent.

La question étant ainsi résolue d'une manière générale, il n'y aura plus qu'à choisir, pour chaque cas particulier, la surface auxiliaire C, de manière que la ligne *b* provenant de son intersection avec la surface B, soit la plus simple possible et la plus facile à construire.

Si la ligne donnée est courbe, on pourra faire usage de l'un des cylindres projetants de cette courbe.

Si la ligne donnée est droite, **fig. 391**, on emploiera comme surface auxiliaire un plan perpendiculaire ou oblique au plan de projection suivant qu'on le jugera nécessaire.

Il est évident aussi que la ligne donnée pourra percer la surface en plusieurs points ; dans ce cas, il sera utile de reconnaître ceux de ces points qui sont vus ou cachés sur les diverses projections de la surface.

CHAPITRE II.

Surfaces de révolution.

791. Définition. On désigne en général par ce nom les surfaces qui proviennent du mouvement d'une ligne quelconque, assujettie à tourner autour d'une droite fixe, par rapport à laquelle elle conserve toujours la même position.

Supposons, par exemple, **fig. 396, pl. 81,** la droite *aa'*, immobile et perpendiculaire au plan horizontal ; concevons, de plus, la courbe à double courbure *coz;* si nous faisons tourner cette dernière ligne autour de *aa'* de manière qu'elle ne change pas de position par rapport à cette droite, la surface engendrée sera de révolution.

Dans ce mouvement, chaque point de la génératrice décrira un cercle horizontal dont le centre sera sur la droite immobile *aa'*, que l'on nomme l'*axe* de la surface.

La position de la génératrice, relativement au plan horizontal, ne changeant pas, sa projection sur ce plan conservera toujours la même forme et ne fera que se déplacer en tournant autour du point *a*, qui représente la projection horizontale de l'axe. Si nous supposons, par exemple, que l'on fasse faire à la courbe *coz* $\frac{1}{12}$ de révolution, le point *c* viendra se placer en *c'*, le point *o* en *o'* et *z* en *z'*.

Pour construire chacun de ces points on fera tourner sa projection horizontale d'une quantité égale à l'arc correspondant compris entre les deux plans verticaux *ap*, *aq*. Ainsi, par exemple, en faisant *zz'* égal à *uu'* on aura la nouvelle position du point *z*. On peut aussi faire *u'z'* égal à *uz ;* on fera de même *xx'* égal à *cc'*, ou *c'x'* égal à *cx*, etc.

En agissant de la même manière pour chacun des points de la courbe, on aura sa nouvelle projection horizontale ; quant à la projection verticale correspondante, elle s'obtiendra en élevant des perpendiculaires par chacun des points c', o', z',..... jusqu'à la rencontre des horizontales qui représentent les projections verticales des cercles parcourus par ces points.

Quand on aura construit un certain nombre de génératrices assez rapprochées les unes des autres, on tracera en lignes pleines les parties de ces génératrices qui sont vues, et en points les parties cachées.

Il serait facile de distinguer ces parties les unes des autres, en raisonnant comme nous l'avons fait au n° 275 ; mais nous allons voir des moyens plus simples d'arriver au même résultat.

792. *Sections perpendiculaires à l'axe.* Un des caractères de toute surface de révolution, c'est que la section, par un plan quelconque *us* perpendiculaire à l'axe, est toujours une circonférence de cercle.

Le rayon de cette circonférence est égal à la distance de l'axe au point où la génératrice est coupée par le plan horizontal dont il s'agit.

Il suit de là que si l'on coupe une surface de révolution par un certain nombre de plans perpendiculaires à son axe, on obtiendra un système de cercles parallèles entre eux, et que l'on appelle, par cette raison, *les parallèles de la surface.*

La portion de surface comprise entre deux parallèles quelconques se nomme une *zone.*

793. Les projections des parallèles sur un plan perpendiculaire à l'axe sont des cercles concentriques, et le point a, centre commun de tous ces cercles, appartient à l'axe de la surface.

Dans les diverses questions où l'on fait usage de ces courbes, on peut presque toujours choisir de préférence celles qui ont une projection commune.

Ainsi, par exemple, les deux parallèles des points 1 et 5 se projetteront par un seul cercle, il en est de même des parallèles qui contiennent les points 6 et 8.

794. Parmi tous les parallèles d'une surface de révolution, on doit surtout distinguer ceux qui passent par les points les plus remarquables de la génératrice ; ainsi, par exemple :

Le point *m*, étant le plus éloigné de l'axe, décrira le cercle qui a le plus grand rayon, et que l'on nomme pour cela *le plus grand parallèle*.

Lorsque ce parallèle partage la surface en deux portions égales on lui donne le nom d'*équateur*.

Le point *n*, étant le plus rapproché de l'axe, décrit le plus petit parallèle que l'on nomme *cercle de gorge* ou *collier*.

Si l'axe rencontre la surface, **fig. 399**, le point *o* qui résulte de cette intersection prend le nom de *pôle*. On peut considérer ce point comme le plus petit parallèle, et dans ce cas le cercle de gorge n'existe pas.

795. Le plus grand et le plus petit parallèle forment les limites de la projection sur le plan perpendiculaire à l'axe, et déterminent par conséquent les parties *vues* et *cachées* de cette projection.

Ainsi, par exemple, sur la **fig. 396**, toute la zone comprise entre le cercle de gorge 3 et le parallèle 1 sera vue sur la projection horizontale ; celle qui est comprise entre les deux parallèles 3 et 5 sera cachée par la zone précédente.

La surface sera vue entre les parallèles 5 et 7 et sera cachée depuis ce dernier cercle jusqu'au parallèle 8.

796. *Sections passant par l'axe.* Toute section d'une surface de révolution par un plan *ap* qui contient son axe se nomme une *section méridienne*.

La projection de toute section méridienne sur le plan perpendiculaire à l'axe sera une droite passant par le point *a*.

On peut, après avoir construit un assez grand nombre de génératrices, déterminer les points où chacune de ces lignes serait coupée par le plan méridien dont il s'agit.

Ainsi, la courbe *kny* est la projection verticale de la section par le plan méridien *ap*, et la courbe 1-5-8 est la section par le plan *ag*.

Cette dernière ligne doit être tangente aux projections verticales de toutes les génératrices.

Le point de tangence sur chacune de ces courbes peut être déterminé en élevant une perpendiculaire par le point suivant lequel sa projection horizontale coupe la trace du plan méridien *ag*.

797. Il est facile d'obtenir la section méridienne sans construire toutes les projections de la génératrice. En effet, cette ligne étant donnée par ses deux projections *cz*, *c'z'*, **fig. 398**, on décrira le parallèle passant par chacun de ses points, et l'on déterminera ensuite la section de toutes ces circonférences par le plan qui contient le méridien demandé.

Ainsi, par exemple, la courbe *k'y'*, **fig. 398**, est la projection verticale du méridien situé dans le plan *ap*, et la courbe 1-3-5-8 est la projection verticale du méridien *ap'*.

798. *Tous les méridiens sont égaux.* Car si l'on fait tourner la courbe *au* autour de l'axe, tous ses points viendront coïncider avec les points correspondants du méridien *au'*.

Ce dernier méridien jouit particulièrement de cet avantage, qu'il est projeté sur le plan vertical dans sa véritable grandeur; c'est pourquoi on lui donne le nom de *section méridienne principale*, ou simplement *méridien principal*.

Tout méridien se compose de deux courbes égales placées symétriquement de chaque côté de l'axe.

Cependant il est permis de considérer chacune de ces deux courbes comme un méridien différent.

Si on fait tourner le méridien principal autour de l'axe, la courbure de la projection verticale deviendra moins sensible à mesure que l'on approchera de la position *ap''*, et lorsque le plan *ap* sera parvenu en *ap''*, la section méridienne se projettera par une droite *a'a''* perpendiculaire à la ligne AZ.

La portion de surface comprise entre deux méridiens quelconques se nomme un *fuseau*.

799. Le méridien principal formera la limite de la projec-

tion verticale, et déterminera par conséquent les *parties vues et cachées* sur cette projection.

Ainsi, par exemple, tout point situé en deçà du plan vertical qui a pour trace la droite $p'q'$ sera vu sur la projection verticale, tandis qu'au contraire tout point situé au delà du même plan aura sa projection verticale cachée.

800. C'est pour plus de généralité dans la définition que nous avons supposé la surface engendrée par la courbe à double courbure cz, $c'z'$, **fig. 396** ; mais la section méridienne étant une courbe plane, il sera en général plus simple de prendre cette courbe pour génératrice ; et si l'on a soin de placer l'axe perpendiculaire à l'un des plans de projection, la représentation de la surface sur l'épure deviendra très-facile.

Supposons, **fig. 398**, que l'on ait placé l'axe aa' perpendiculaire au plan horizontal ; on construira symétriquement à droite et à gauche, et dans sa véritable grandeur, la courbe 1-3-5-8 donnée comme génératrice et l'on aura la projection verticale de la surface. Pour la projection horizontale, on décrira du point a, comme centre, deux cercles concentriques ayant pour rayons les distances de la méridienne aux points qui sont le plus près et le plus loin de l'axe ; le premier est le cercle de gorge, et le second forme la limite extérieure de la projection ; quand la méridienne coupe l'axe, nous avons dit que le cercle de gorge n'existe pas.

801. Les cas particuliers de surface de révolution se distinguent ordinairement par la nature de leur section méridienne.

Ainsi, l'*ellipsoïde de révolution*, **fig. 399**, est la surface engendrée par le mouvement d'une demi-ellipse que l'on ferait tourner autour de l'un de ses axes. La sphère est une ellipsoïde de révolution qui a pour section méridienne un cercle.

La *surface annulaire* ou le *tore*, **fig. 397**, est engendrée par le mouvement d'un cercle tournant autour d'une droite située dans son plan. La section méridienne se compose de deux cercles égaux au cercle générateur, et placés symétri-

quement par rapport à l'axe. Le plan horizontal mené par le centre du cercle générateur contient le plus grand parallèle de la surface, et le plus petit, qui est le cercle de gorge. Dans le cas où le cercle générateur toucherait l'axe, le cercle de gorge serait un point, et la section méridienne se composerait de deux cercles tangents. Si le centre du cercle générateur se rapprochait de l'axe, la forme de la surface se rapprocherait de celle de la sphère, et ne différerait pas de cette dernière surface si le centre du cercle générateur se trouvait situé sur l'axe de révolution ; ce qui permet de regarder encore la sphère comme un cas particulier des surfaces annulaires.

Si la génératrice est une parabole, **fig. 400**, la surface sera un *paraboloïde* et prendra des formes différentes, suivant que la révolution aura lieu autour de l'axe de la parabole ou autour d'une droite *ac* perpendiculaire à cet axe.

Enfin, on nomme *hyperboloïde de révolution* la surface qui est engendrée par une hyperbole tournant autour de l'un de ses axes.

Dans l'exemple, **fig. 403**, la révolution se fait autour de l'axe non transverse, et la surface est continue, c'est-à-dire qu'elle pourrait être parcourue par un point dans toute son étendue. Pour exprimer cette propriété, on donne à cette surface le nom d'*hyperboloïde de révolution à une nappe*. Il n'en serait pas de même si le mouvement s'était fait autour de l'axe transverse, **fig. 402**, il y aurait alors dans cette surface deux parties séparées l'une de l'autre, ce qui lui ferait donner le nom d'*hyperboloïde de révolution à deux nappes*.

802. L'hyperboloïde de révolution à une nappe jouit d'une propriété remarquable. Cette surface, **fig. 401**, peut être engendrée par le mouvement d'une droite inclinée, telle que *aa*, *a'c'*, qui tournerait autour de l'axe vertical *o*, *o'*. Dans ce mouvement, le point *aa'* parcourra le cercle horizontal *a'*, *v'*, et le point *cc'* ne quittera pas le plan horizontal de projection. Le point *nn'*, qui est le plus près de l'axe, décrira le cercle de gorge.

Si la génératrice se rapprochait de l'axe, ce cercle diminuerait, et au moment où il deviendrait nul, la surface de

l'hyperboloïde serait remplacée par les deux nappes d'un cône circulaire qui aurait pour sommet le point où l'axe serait coupé par la génératrice.

Si l'on faisait tourner la génératrice autour de l'horizontale projetante du point n, n', pour la ramener dans une position verticale, la surface de l'hyperboloïde s'allongerait dans le sens de l'axe, et se transformerait en un cylindre circulaire au moment où la génératrice serait parallèle à l'axe.

Ainsi, le cône et le cylindre circulaires sont des cas particuliers parmi les hyperboloïdes de révolution à une nappe.

803. *Double génération.* L'hyperboloïde de révolution peut être engendrée par une ligne droite de deux manières différentes, c'est-à-dire que l'on obtiendra la même surface, **fig. 403,** en prenant pour génératrice la droite (ac, $a'c'$) ou la droite (ou, $o'u'$), inclinées en sens contraire dans le même plan projetant vertical.

En effet, considérons pour un instant comme différentes les surfaces engendrées par ces deux droites ; la génératrice (ac, $a'c'$) appartenant à la première surface, la droite $o''u''$, $o'''u'''$ sera une génératrice de la seconde. Or, les cordes ac, $o''u''$ étant égales, il s'ensuit évidemment que les droites ao'', cu'' seront parallèles, de plus les droites (ao'', $a'o'''$) et (cu'', $c'u'''$), qui ont leurs projections horizontales ao'', cu'' parallèles, sont situées dans les plans horizontaux $c'u'''$, $a'o'''$, par conséquent elles sont parallèles dans l'espace et les quatre points a, o'', c, u''' sont dans un même plan. Donc les deux lignes (ac, $a'c'$) ($o''u''$, $o'''u'''$) se rencontrent au point mm'.

Ce que nous venons de dire des deux droites (ac, $a'c'$) ($o''u''$, $o'''u'''$) pouvant s'appliquer à toutes les autres, quelle que soit leur position, il en résulte que toutes les génératrices de la première surface rencontreront nécessairement toutes celles de la deuxième, et par conséquent ces deux surfaces coïncident dans tous leurs points.

Les deux systèmes de génératrices partagent toute la surface de l'hyperboloïde en un nombre infini de petits quadrilatères qui diminuent de grandeur dans le voisinage du cercle de gorge.

Quoique l'on n'ait construit sur la figure **401** qu'une seule des deux générations de l'hyperboloïde, on peut se faire une idée de la disposition de tous les quadrilatères dont nous venons de parler, parce que les lignes ponctuées qui représentent les parties cachées de la première génération deviendraient les parties vues de la seconde et seraient, dans ce cas, tracées en lignes pleines.

804. *Section méridienne.* On pourrait projeter, **fig. 401**, un certain nombre de génératrices et construire le point où chacune de ces lignes serait coupée par le plan pq, ou bien on opérera de la manière suivante:

La droite génératrice ac, $a'c'$ de l'hyperboloïde étant donnée, **fig. 403**, on tracera les parallèles passant par chacun de ses points, et la section de toutes ces circonférences par le plan vertical pq sera le méridien principal.

805. Nous rappellerons que les projections verticales des génératrices de la surface doivent être tangentes à la section méridienne principale (796).

Cette remarque nous donnera un moyen de reconnaître la nature de cette courbe.

En effet, la génératrice (ac, $a'c'$) étant donnée, faisons faire à cette droite une demi-révolution pour l'amener dans la position ($a''c''$, $o'u'$). Les deux projections verticales se couperont en un point x' situé sur la projection de l'axe de la surface.

Si nous prenons actuellement pour génératrice la droite ou, $o'u'$ et que nous amenions cette ligne dans une position quelconque ($o''u''$, $o'''u'''$), elle coupera les deux droites (ac, $a'c'$) ($a''c''$, $o'u'$) aux points mm', nn', et le point v suivant lequel la génératrice $o''u''$, $o'''u'''$ perce le plan du méridien principal étant le milieu de mn, sa projection verticale v' sera pareillement le milieu de $m'n'$.

Or, il résulte évidemment de cette propriété que la section méridienne sera une hyperbole ayant pour asymptotes les deux droites $a'c'$, $o'u'$; car on sait (*Algèbre appl.*) que le point où l'hyperbole est touchée par une droite quelconque se

trouve toujours au milieu de la partie de cette droite comprise entre les asymptotes (390).

Les deux génératrices (ac, $a'c'$) ($a''c''$, $o'u'$) ne percent le plan méridien qu'à l'infini, ce qui s'accorde avec la propriété connue des asymptotes.

806. Ce qui précède nous fournit le moyen le plus simple de construire la section méridienne d'une hyperboloïde de révolution dont on connaît la génératrice ac, $a'c'$.

En effet, cette ligne étant successivement amenée dans les deux positions (ac, $a'c'$) ($a''c''$, $o'u'$), on construira les projections verticales correspondantes, ce qui donnera les asymptotes de l'hyperbole demandée.

On connaît de plus les sommets appartenant au cercle de gorge dont le rayon est égal à la droite xr, abaissée du point x perpendiculairement sur ac : cela suffit pour que l'on puisse construire la courbe.

807. Si par le point xx' on conçoit une droite parallèle à la génératrice et que l'on fasse tourner cette ligne autour de l'axe, elle engendrera un cône droit à base circulaire que l'on nommera *cône asymptote*, parce qu'il ne touche la surface qu'à une distance infinie du centre.

L'hyperboloïde de révolution à une nappe enveloppe le cône asymptote, tandis que l'hyperboloïde à deux nappes, **fig. 402**, est au contraire enveloppée par ce cône.

808. La surface annulaire ou le tore est la plus importante des surfaces de révolution parce qu'elle renferme les éléments de tous les cas particuliers de ce genre de surface.

En effet, quels que soient les contours ou sinuosités de la section méridienne donnée pour génératrice, on pourrait toujours considérer cette ligne comme composée d'un certain nombre d'arcs de cercle qui se raccordent.

Ainsi, par exemple, la courbe $acvu$, **fig. 404**, étant composée des trois arcs ac, cv, vu, la zone $acac$ sera une portion de la surface annulaire engendrée par le cercle qui a son centre au point 1.

La zone $cvcv$ appartient à une seconde surface annulaire

engendrée par un cercle décrit du point 2 comme centre.

Enfin, la zone *vuvu* fait partie d'une troisième surface annulaire engendrée par le cercle qui a pour centre le point 3.

La première zone se raccorde avec la deuxième, parce qu'elles sont touchées toutes deux par un même cylindre, suivant le cercle horizontal *cc*.

La seconde zone se raccorde avec la troisième, parce qu'elles sont touchées suivant le cercle *vv* par un cône circulaire qui a son sommet au point *s*.

809. Cette propriété d'être touchées suivant un parallèle, par un cône ou par un cylindre circulaire, appartient à toutes les surfaces de révolution.

En général, si en un point *v* on conçoit une infinité de courbes qui soient touchées par une même droite *sv*, et que l'on fasse tourner toutes ces courbes autour de l'axe commun *mn*, toutes les surfaces de révolution engendrées par ces courbes se toucheront et seront touchées par un même cône circulaire ayant pour génératrice la droite *sv*.

De plus, tous les plans tangents à ce cône seront également tangents aux surfaces de révolution qui ont le cercle *vv* pour parallèle commun. On pourra donc considérer à volonté toute surface de révolution comme étant continue, ou composée de plusieurs autres surfaces de révolution qui se raccorderaient suivant les parallèles passant par les points de raccordement des différentes courbes dont se compose la section méridienne.

La surface que nous venons de prendre pour exemple se nomme une *scotie*.

810. *Axe commun.* Si on fait tourner l'ellipse et l'hyperbole, **fig. 399,** autour de la droite *ac*, on obtiendra deux surfaces de révolution qui se couperont suivant les deux cercles *vu*, *zx*.

Les deux paraboloïdes, **fig. 400**, se couperont suivant le parallèle *vu*; l'hyperboloïde à deux nappes et la sphère projetées, **fig. 402**, se couperont suivant les deux parallèles *vu*, *zx*.

En général, toutes les fois que deux surfaces de révolution auront un axe commun, elles se couperont suivant autant de parallèles qu'il y aura de points communs à leurs sections méridiennes.

811. *Exprimer qu'un point appartient à une surface de révolution.* Supposons que l'on connaisse la projection verticale z', **fig. 397** et **403**, on construira le parallèle correspondant ; puis on abaissera la perpendiculaire $z'z$, dont l'intersection avec le parallèle donnera deux points z, z, qui tous deux satisfont aux conditions demandées. Si l'on avait donné la projection horizontale z, on aurait pu commencer par construire le parallèle ; puis élevant la perpendiculaire zz, ses intersections avec le parallèle auraient déterminé les projections verticales des points demandés.

812. *Développement.* Les surfaces de révolution ne peuvent se développer qu'approximativement et par des moyens analogues à ceux que nous avons employés (682) pour la sphère.

En construisant un certain nombre de plans méridiens et de plans perpendiculaires à l'axe, toute la surface se trouvera partagée en trapèzes. Si l'on place à côté les uns des autres, et dans leur véritable grandeur, tous les trapèzes compris entre deux parallèles consécutifs, on aura le *développement par zones*, tandis qu'en construisant l'un au-dessous de l'autre tous les trapèzes compris entre deux plans méridiens, on aura le *développement par fuseaux*.

Ce dernier mode de développement est souvent préféré dans les arts, parce qu'en ayant le soin de construire les plans méridiens à égale distance les uns des autres, tous les fuseaux seront égaux entre eux, et le développement de l'un d'eux servira pour tous les autres ; tandis que toutes les zones différant entre elles, il faudrait construire séparément le développement de chacune.

Nous verrons plus tard pourquoi les cônes et les cylindres de révolution jouissent de la propriété d'être développables.

813. *Sections perpendiculaires au plan de projection.*

On établira sur la surface donnée un certain nombre de parallèles, puis l'on construira les points suivant lesquels ces cercles seront coupés par le plan donné. C'est ainsi que l'on a obtenu, **fig. 406, pl. 82,** la courbe *nxnx* , qui est la projection horizontale de la section d'une surface annulaire par le plan *p*, perpendiculaire au plan vertical.

On pourra employer comme auxiliaires des plans verticaux passant par l'axe de la surface donnée : ces plans couperont la surface suivant des sections méridiennes dont on évitera la projection en les rabattant autour de l'axe ; les points (*mm'*) (*nn'*) ont été déterminés de cette manière. Un plan vertical *o*-2 a coupé la surface donnée suivant une section méridienne qui, en tournant autour de l'axe, est venue se confondre avec le méridien principal de cette surface. La droite provenant de l'intersection du plan *p* et du plan auxiliaire 0-2 est venue se rabattre en *o'*-2', et l'intersection de cette ligne avec la section méridienne principale a donné deux points *m''*, *n''* qui, projetés horizontalement sur *oh*, et ramenés dans le plan *o*-2, ont déterminé les points *mm'*, *nn'*.

On fera bien de profiter de la symétrie. Ainsi, on pourra déterminer par une seule opération les points qui sont situés dans les deux plans méridiens 0-2, 0-2.

La tangente 0'-3' déterminera le point *u''* qui, ramené dans les plans 0-3, donnera les deux points *u*, *u*.

814. Dans quelques cas particuliers, la recherche de la courbe de section peut être simplifiée. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de construire la courbe résultant de la section d'une ellipsoïde de révolution par un plan vertical *np*, **fig. 405.** On admettra (*Algèbre appl.*) que la courbe demandée doit être une ellipse, après quoi on construira l'horizontale *oc*, *o'c'*, perpendiculaire sur *np*, ce qui donnera le point *cc'* pour le centre de cette ellipse.

On ramènera ensuite le point *c* en *c''* dans le plan *op'*, on élèvera la perpendiculaire *c''a*.

Les intersections de cette droite avec le méridien principal de la surface détermineront les deux parallèles qui contiennent le point le plus bas, et le point le plus élevé de la

courbe demandée. La différence des hauteurs de ces deux points sera l'axe vertical de l'ellipse cherchée.

L'axe horizontal $z'x'$ s'obtiendra en élevant deux perpendiculaires par les points z et x.

La verticale vv' déterminera les points suivant lesquels la projection verticale de la courbe touche celle du méridien principal de la surface.

Les points mm' peuvent être considérés comme provenant de la rencontre du plan vertical np par les deux parallèles qui ont le cercle mm'' pour projection horizontale.

815. On peut encore supposer que la section de l'ellipsoïde par le plan op'' a été rabattue sur le méridien principal, et que la verticale st représente dans ce rabattement l'intersection des deux plans np, op'', de sorte que les points d'intersection $m'''m'''$ étant ramenés à leur place deviendront m', m'.

En faisant tourner la courbe autour de la verticale du point n, on obtiendra en M sa véritable grandeur.

816. Lorsqu'on sait que la section demandée est une ellipse, on peut éviter la projection et le rabattement en faisant usage d'un plan auxiliaire sur lequel cette courbe se projetterait par *un cercle*.

Supposons que la droite np, **fig. 407**, soit la trace d'un plan perpendiculaire au plan vertical de projection.

Le point c, milieu de zx, sera le centre de l'ellipse cherchée. Le petit axe de cette courbe sera la corde commune à l'ellipse zx et au parallèle av, dont la moitié est rabattue en auv, de sorte que cu est le demi petit axe de l'ellipse qui a pour demi grand axe cz.

Or, si on décrit la demi-circonférence $cu'z$ et que l'on porte cu de c en u', le triangle $cu'z$ sera rectangle, et la section cherchée se projettera par un cercle sur tout plan tel que np' dont la direction serait perpendiculaire à la corde zu' (541).

Si après avoir projeté la courbe zx sur le plan np' on le fait tourner autour de l'horizontale projetante du point n, on obtiendra la circonférence M.

817. *Transformations diverses de la courbe de section.* Si nous faisons mouvoir le plan p, **fig. 406**, parallèlement à lui-même en allant de droite à gauche, tous les points de la courbe se rapprocheront et finiront par se réunir en un seul, lorsque le plan mobile sera parvenu dans la portion p'.

Alors le plan sera tangent à la surface et le point de tangence sera t, t'. Si au contraire nous faisons mouvoir le plan p de gauche à droite, les deux points x, x se rapprocheront et se réuniront en un seul point zz', lorsque le plan mobile sera dans la position p''. Ce dernier plan touchera la surface au point zz' et la coupera suivant la courbe $zvrzrv$.

Si on continuait à faire avancer le plan mobile de gauche à droite, la section se partagerait en deux courbes fermées indépendantes l'une de l'autre, et placées symétriquement par rapport au plan méridien h-1. Ces dernières courbes n'ont pas été tracées sur l'épure, mais il sera facile de les construire.

Si on continue à faire mouvoir le plan coupant dans la même direction jusqu'à ce qu'il ait dépassé le point o'', on obtiendra toutes les courbes précédentes dans un ordre inverse, et leurs projections horizontales seront placées symétriquement par rapport au plan méridien perpendiculaire au plan vertical de projection.

818. On retrouvera des relations du même genre, **fig. 411**, dans les différentes courbes provenant de la section de la scotie par des plans parallèles à son axe. Supposons, pour plus de simplicité, qu'on ait projeté toutes ces courbes sur un plan parallèle aux différentes positions du plan coupant. Les sections que l'on obtiendra seront de trois espèces :

1° Si la distance du plan coupant à l'axe est plus grande que le rayon du cercle de gorge, la section se composera de deux courbes indépendantes et placées l'une au-dessus, l'autre au-dessous du plan horizontal ac. Les points o, o appartiennent au méridien qui est perpendiculaire au plan coupant ;

2° Si la distance de l'axe au plan coupant est égale au rayon du cercle de gorge, les points o, o se réunissent en un seul o', suivant lequel le cercle de gorge et le méridien per-

pendiculaire au plan coupant sont touchés par ce plan. La section se compose des deux courbes *so'z* qui se coupent au point *o'*, situé sur le cercle de gorge. Le plan coupant est tangent au point *o'*;

3° Enfin, lorsque la distance de l'axe au plan coupant sera moindre que le rayon du cercle de gorge, la section se composera de deux courbes séparées, placées symétriquement l'une à droite et l'autre à gauche du plan méridien *dm*, et les points *o''*, *o''* appartiendront au cercle de gorge de la surface.

819. Avant de quitter ce sujet, j'appellerai l'attention du lecteur sur les différentes formes que peut prendre la section d'une surface du second degré par un plan.

1er *exemple*. Supposons que la surface coupée soit une *ellipsoïde de révolution*, **fig. 407**. La courbe de section pourra subir trois transformations différentes :

1° Le plan coupant 1, perpendiculaire à l'axe, donnera pour section un cercle ;

2° Le plan 2 coupera la surface suivant une ellipse ;

3° Le plan 3 sera tangent et la courbe de section sera remplacée par le point de tangence.

2e *exemple*. Si la surface coupée est une *paraboloïde de révolution*, **fig. 409**, la section subira quatre transformations :

1° Le plan 1, perpendiculaire à l'axe, coupera la surface suivant un cercle ;

2° Le plan 2 donnera pour section une ellipse ;

3° Le plan 3, parallèle à l'axe, donnera une parabole ;

4° Enfin le plan 4 sera tangent.

3e *exemple*. Si la surface coupée est une *hyperboloïde de révolution à une nappe*, **fig. 408**, la section peut subir cinq transformations :

1° Le plan 1, perpendiculaire à l'axe, donnera pour section un cercle ;

2° Le plan 2 donnera une ellipse ;

3° Le plan 3, parallèle à la génératrice *vu* du cône asymptote, donnera une parabole ;

4° La section par le plan 4 sera une parabole ;

5e Enfin le plan 5 sera tangent au point *m*.

820. Si nous faisons mouvoir le plan 4 parallèlement à lui-même, nous obtiendrons les variétés suivantes :

1° Le plan 4 donnera une hyperbole dont l'axe transverse sera parallèle au plan sur lequel nous supposons que la surface a été projetée ;

2° Le plan 4′ sera tangent et donnera pour section deux génératrices de la surface (803).

Ces deux droites pourront être considérées comme deux tangentes (780) et se couperont au point n, qui par conséquent sera le point de tangence ;

3° La section par le plan 4″ sera une hyperbole dont l'axe transverse sera perpendiculaire au plan de projection, et se projettera sur ce plan par le point o.

821. Les hyperboles provenant de la section par les plans 4 et 4″ ont les asymptotes parallèles aux deux génératrices provenant de la section par le plan 4′. Ces dernières lignes peuvent être considérées comme formant une hyperbole pour laquelle la distance du centre au sommet de la courbe serait réduite à zéro.

822. Si on donne plusieurs hyperboles ayant pour asymptotes communes les droites vu, zx, et que l'on fasse tourner toutes ces courbes autour de l'axe commun toutes les hyperboloïdes engendrées auront le même axe et seront touchées à l'infini par le cône asymptote, qui a pour génératrices les deux droites zx, vu. Or les sections de toutes ces surfaces par un même plan seront des courbes du second degré semblables et concentriques.

Il faudra remarquer cependant que le plan 4′ coupera le cône suivant une hyperbole, ayant pour asymptotes les deux génératrices de l'hyperboloïde, tandis que le plan 4‴ coupe cette dernière surface suivant une hyperbole qui a pour asymptotes deux génératrices du cône. Et quoique les axes transverses de ces deux hyperboles soient dirigés dans l'espace suivant des directions rectangulaires, elles ne possèdent pas moins le caractère des figures semblables, en cela que les axes transverses et non transverses de ces courbes sont

réciproquement proportionnels et que leurs asymptotes sont parallèles.

823. Si nous comparons les sections de l'hyperboloïde avec celles du cône asymptote, nous remarquerons que le plan 4 coupe ces deux surfaces suivant deux hyperboles qui ont le même axe transverse.

Le plan 4′ coupe le cône suivant une hyperbole qui a pour asymptotes les deux génératrices provenant de la section de l'hyperboloïde.

Le plan 4″ coupe le cône et l'hyperboloïde suivant deux hyperboles qui ont les mêmes asymptotes, mais dont les axes transverses sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Enfin, le plan 4‴ coupe l'hyperboloïde suivant une hyperbole qui a pour asymptotes les deux droites provenant de la section du cône par un plan qui contient son sommet.

Toutes ces courbes ont leurs centres sur la droite *cn*.

Les démonstrations de ces propriétés ne peuvent être convenablement placées que dans les traités d'*Algèbre appliquée*.

824. Plans tangents. *Construire un plan tangent à une surface de révolution par un point* m′m′, *situé sur la surface*, **fig. 410.**

Nous avons reconnu que le plan tangent en un point donné d'une surface quelconque serait déterminé par deux tangentes passant par ce point ; de sorte qu'il ne reste plus qu'à chercher quelles sont les tangentes les plus faciles à construire.

Or, de toutes les courbes que l'on peut faire passer par un point d'une surface de révolution, la plus simple est la section par un plan perpendiculaire à son axe. Il sera donc convenable de choisir pour première tangente la droite horizontale *aa′*, qui touche le parallèle passant par le point donné. Pour obtenir la seconde tangente, on rabattra la section méridienne *sm*, en la faisant tourner autour de l'axe. Le point donné *m*, *m′* viendra se placer en *m″*, et la tangente dans ce rabattement sera *s′m″* ; en ramenant cette tangente à la place qu'elle doit occuper, le point *s′* ne bougera pas, puis-

qu'il fait partie de la charnière, et l'on aura pour seconde tangente la droite sb, $s'b'$, qui, avec la ligne a, a', déterminera le plan tangent p.

825. Ainsi le parallèle qui passe par un point donné sur une surface de révolution faisant toujours connaître une tangente à ce point, *il ne restera plus dans chaque cas qu'à obtenir une tangente à la section méridienne qui contient le point donné :* construction qui dépendra des propriétés géométriques de cette courbe.

826. La solution précédente revient évidemment à construire par le point donné mm' un plan tangent au cône circulaire engendré par la droite $s'b''$, et qui par conséquent touche la surface suivant le parallèle passant par le point donné.

En général, *toutes les fois que deux surfaces se toucheront en un ou plusieurs points, tout plan qui en un de ces points toucherait l'une de ces surfaces serait aussi tangent* à l'autre. En effet, le point de tangence pourra être considéré comme une facette infiniment petite, commune aux deux surfaces, et cette facette prolongée en tous sens deviendra un plan tangent à toutes deux.

827. Cette conséquence nous sera utile dans le cas où nous n'aurions pas sur l'épure le sommet du cône tangent. En effet, après avoir construit la tangente sb'' nous tracerons la droite $m''o$ perpendiculaire à sb'.

Le point o sera le centre d'une sphère qui touchera la surface donnée dans toute l'étendue du parallèle $m''m'$; de sorte que la question proposée sera réduite à construire un plan tangent par le point mm', situé sur la surface de la sphère qui a pour centre le point o (694).

Il n'est pas nécessaire de construire la sphère, dont nous ne parlons ici que pour mieux faire comprendre le principe ; il est évident qu'il suffit de construire par le point mm' un plan perpendiculaire à la droite sm, om'.

828. *Construire un plan tangent par un point situé sur la surface d'une hyperboloïde de révolution à une nappe,* **fig. 412.**

L'axe et la génératrice zx, $z'x'$ de la surface étant donnés, on construira le cercle de gorge, le parallèle qui contient le point donné, puis les deux projections m et m' de ce point.

On fera tourner ensuite la génératrice (zx, $z'x'$) jusqu'à ce qu'elle soit parvenue dans la position ($z''x''$, $z'''x'''$), et l'on prendra cette droite pour la première tangente (780).

On construira la droite vu, tangente à la projection horizontale du cercle de gorge, et l'on en déduira la projection verticale $v'u'$; de sorte que la ligne (vu, $v'u'$), deuxième génératrice de la surface (803), sera la seconde tangente. Le plan p sera déterminé par les deux droites ($z''x''$, $z'''x'''$) (vu, $v'u'$).

On remarquera que pour résoudre la question, on n'a pas fait usage de la section méridienne que l'on pourrait alors se dispenser de construire.

829. Tous les plans tangents à l'hyperboloïde de révolution coupent cette surface suivant deux génératrices, et l'intersection de ces deux droites détermine le point de tangence.

830. Si le point par lequel on propose de construire un plan tangent à une surface de révolution est situé sur le méridien principal, l'une des tangentes sera l'horizontale projetante du point donné ; de sorte que le plan tangent p' **fig. 406**, sera perpendiculaire au plan vertical de projection.

831. Si le point donné appartient à l'un des parallèles formant les limites de la projection horizontale de la surface, le plan tangent sera perpendiculaire au plan horizontal de projection.

Ainsi, les plans verticaux qui auraient pour traces les deux droites p''' et p^{IV} sont tangents, le premier au point aa' et le deuxième au point cc'. Le plan p^{IV} est en même temps un plan coupant.

832. *Normale*. La droite $t'k$, **fig. 406**, est une normale, il en est de même de la droite mh, $m'h'$ perpendiculaire au plan tangent p, **fig. 410.**

Si l'on veut donner à la normale mh, $m'h'$ une longueur déterminée, on rabattra cette droite dans le plan du méridien principal, on fera $m''h''$ égale à la longueur donnée, puis on ramènera la normale à sa place en la faisant tourner autour de l'axe.

833. On remarquera que pour construire la normale il n'est pas nécessaire d'avoir les traces du plan tangent.

En effet, pour obtenir une normale au point z, on rabattra ce point en z', puis on construira la normale que l'on fera revenir à sa place en remarquant que dans ce mouvement le point c doit rester immobile.

834. *Construction du plan tangent à une surface de révolution par un point situé en dehors de cette surface.*

La question est indéterminée, car si par le point donné on construit un plan tangent, il sera possible de faire tourner ce plan autour de la surface sans qu'il cesse d'être tangent et de contenir le point donné.

Or, si pour chacune des positions de ce plan mobile, on pouvait déterminer le point de tangence, la construction de chaque plan tangent se réduirait aux opérations que nous avons indiquées au n° 824.

D'ailleurs, la construction du plan tangent n'a souvent d'autre but que de faire comprendre les opérations nécessaires pour déterminer les points de tangence, et lorsque ces points sont obtenus il devient presque toujours inutile de construire les traces des plans.

835. *Ligne de contact.* Si par le point donné ss', **fig. 414, pl. 83,** on conçoit une droite $s'a$ qui touche la surface en l'un quelconque de ses points, et que l'on fasse mouvoir cette droite de manière que sans cesser de contenir le point donné, elle s'appuie sur la surface, on engendrera un cône tangent qui aura pour sommet le point donné.

Tous les plans tangents à ce cône satisferont à la question proposée, et toucheront la surface en l'un des points suivant lesquels cette surface est touchée par le cône enveloppant qui a son sommet en ss'.

La courbe qui contient tous ces points se nomme *ligne de contact*, et notre but est de la construire.

836. *Méthode des plans coupants.* On fera passer par le point *ss'* un plan *sp* perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal par exemple.

On construira la courbe provenant de la section de la surface par le plan *sp*.

On déterminera tous les points suivant lesquels cette courbe peut être touchée par des droites qui contiendraient le point donné. Chacun de ces points *m*, *m'* fera partie de la courbe cherchée.

En effet, le plan tangent à l'un des points *m'*, devant contenir toutes les droites qui touchent la surface à ce point, il devra contenir la drotie *sm*, *s'm'*, par conséquent il passera par le point *ss'*. On recommencera cette construction en choisissant la direction des plans coupants de la manière la plus avantageuse.

837. On peut choisir à volonté l'une des projections du point que l'on veut obtenir.

Ainsi, par exemple, si l'on donnait le point *m* comme projection horizontale de l'un des points de la courbe cherchée, on obtiendrait la projection verticale en opérant comme nous venons de le dire.

Si au contraire on avait donné la projection verticale *m'*, il aurait fallu couper la surface par un plan tel que *s'zq* perpendiculaire au plan vertical de projection.

838. La méthode que nous venons d'expliquer est générale et convient à toutes les surfaces ; mais pour éviter la construction des courbes qui proviennent de la section par les différents plans coupants auxiliaires, on doit chercher si les propriétés particulières des surfaces de révolution ne permettent pas d'employer des moyens plus simples.

839. *Méthodes des cylindres projetants.* Étant donnés, **fig. 413**, le point *ss'* et la surface annulaire engendrée par le cercle M, il y aura deux courbes de contact. L'une

contient les points suivant lesquels la surface serait touchée extérieurement par un cône ayant pour sommet le point donné ss'.

La seconde courbe appartient à un cône ayant le même sommet et qui touche la portion de surface engendrée par la demi-circonférence qui est la plus rapprochée de l'axe. Ces deux courbes pourront être déterminées en même temps et de la manière suivante.

La perpendiculaire ss'', abaissée sur la trace du méridien C, percera ce plan en un point dont la projection horizontale s'', ramenée en s''' sur la trace du méridien principal, détermînera s^{IV} pour la projection du point donné ss' sur le plan du méridien C rabattu sur le plan B.

Cela étant fait, on tracera par le point s^{IV} quatre tangentes aux deux cercles qui composent le méridien principal de la surface. Ces quatre droites seront les intersections du plan vertical C par quatre plans tangents à la surface et contenant le point donné ss'.

Les points 1, 1, 1, 1, projetés en 1′, 1′, 1′, 1′ sur la trace du méridien principal B, seront ramenés de là en 1″, 1″, 1″, 1″ sur la trace du méridien C; leurs projections verticales 1‴, 1‴, 1‴, 1‴ seront situées sur les parallèles qui contiennent les quatre points 1, 1, 1, 1. En opérant de la même manière on obtiendra quatre points dans chaque plan méridien.

On fera bien de multiplier les opérations dans les parties des lignes de contact où les variations de courbure sont le plus sensibles.

Quelques points pourront être obtenus plus facilement par suite de la position particulière des méridiens qui les contiennent. Ainsi, par exemple :

Les quatre tangentes menées par le point s' déterminent, sur la section méridienne principale, les points 2, 2′... suivant lesquels la surface serait touchée par quatre plans contenant le point donné ss' et perpendiculaires au plan vertical de projection. Ces quatre points ont leurs projections horizontales sur la trace du méridien B.

Si nous faisons tourner le méridien A jusqu'à ce qu'il soit venu coïncider avec le méridien principal, le point s viendra

se placer en s^{v}, d'où on déduira s^{vi} qui sera le point donné ss' rabattu dans le méridien B.

Les quatre tangentes menées par ss^{vi} détermineront alors les points 3, 3'... suivant lesquels la surface serait touchée par quatre plans passant par le point ss' et perpendiculaires au plan du méridien s-A.

Ce sont les points les plus élevés et les plus bas des deux courbes de contact.

840. La solution que nous venons d'exposer revient à prendre successivement chaque méridien pour plan de projection ; de sorte que les tangentes menées par les points s^{vi}, s^{iv}, s^{vii}, s' sont les traces des plans tangents aux *cylindres projetants* perpendiculaires aux plans de projection A, C, E, B, etc.

841. Les tangentes menées par le point s sont les traces des plans tangents aux deux cylindres verticaux qui contiennent le cercle de gorge et le plus grand parallèle de la surface.

Elles déterminent les points 4, 4' suivant lesquels la surface serait touchée par quatre plans verticaux contenant le point donné ss'. Ces quatre points appartenant au plus grand parallèle et au cercle de gorge, leurs projections verticales seront situées sur la droite horizontale ac.

842. On peut abréger beaucoup le travail en ayant égard à la symétrie.

Ainsi, les deux méridiens B et B' étant placés symétriquement par rapport au méridien s-A, les points obtenus dans le méridien B pourront être reportés à la même distance de l'axe sur la trace horizontale du méridien B' d'où on déduira leurs projections verticales sur le parallèle correspondant.

Les points situés dans le méridien C' se déduiront de la même manière de ceux qui appartiennent au méridien C. Enfin les points du méridien E seront déterminés par le point s^{vii}, projection du point ss' sur le méridien E rabattu dans le plan B.

Si on construit la droite *su*, tangente à la projection horizontale de la courbe intérieure, et la droite *s'u'*, tangente à la projection verticale de la même courbe, les deux points de tangence *u* et *u'* devront se trouver sur une même droite perpendiculaire à la ligne AZ. Cela provient de ce que, pour le point *uu'*, la tangente à la courbe de contact doit contenir le point donné.

Il existe trois autres points qui jouissent de la même propriété, et qui, deux à deux, sont placés symétriquement par rapport au méridien A*s*.

Pour éviter la confusion des lignes, on n'a tracé sur l'épure que la tangente au point *u*, *u'*, mais on fera bien de construire les trois autres tangentes, et de s'assurer que les points de tangence correspondants sur les deux projections sont situés deux à deux sur la même perpendiculaire à la ligne AZ. Il n'existe pas de points analogues sur la courbe extérieure.

Tous les plans qui touchent la surface en un des points de la courbe intérieure sont en même temps des plans coupants, tandis que tous les plans qui sont tangents en un point de la courbe extérieure ne coupent pas la surface.

843. *Méthode des cônes tangents*, **fig. 415.** La méthode précédente est utile surtout lorsqu'on veut obtenir les points de tangence qui appartiennent à un méridien donné; mais si l'on voulait construire ceux de ces points qui sont situés sur un *parallèle* de la surface, il faudrait opérer de la manière suivante. Au lieu de construire comme précédemment des plans tangents aux cylindres horizontaux qui touchent la surface suivant des méridiens donnés, on emploiera les plans tangents à des cônes circulaires qui auraient le même axe que la surface et qui la toucheraient suivant les différents parallèles sur lesquels on veut obtenir les points de tangence.

Ainsi, par exemple, pour déterminer ceux de ces points qui seraient situés sur le parallèle *ac*, on tracera la droite *o'a* qui touche au point *a* le méridien principal de la surface.

Le cône circulaire engendré par le mouvement de la droite

o'a autour de l'axe touchera la surface dans toute l'étendue du parallèle *ac*; de sorte que la question sera réduite à construire par le point donné *ss'* deux plans tangents au cône engendré par la droite *o'a* (611).

On joindra le point donné *ss'* avec le point *oo'* qui est le sommet du cône auxiliaire, et la droite *so*, *s'o'* sera l'intersection des deux plans qui sont tangents à ce cône et qui contiennent le point donné. La droite *so*, *s'o'* percera le plan horizontal qui contient le parallèle donné en un point *uu'* par lequel on construira les deux tangentes *u*-1, *u*-1. Les points de tangence 1, 1, déterminés avec toute l'exactitude possible, appartiendront à la courbe demandée.

En effet, les plans tangents à ces points contiendront les deux tangentes *u*-1, *u*-1 ; et comme de plus ils seront tangents au cône auxiliaire, ils devront en contenir le sommet *o'*: donc ils se couperont suivant la droite *uos*, *u'o's'*, et passeront par conséquent par le point donné *ss'*. Ces constructions, répétées pour d'autres parallèles de la surface, feront connaître autant de points que l'on voudra.

Pour le cercle de gorge, le cône auxiliaire devient un cylindre vertical, et les points de tangence 2, 2' doivent être déterminés par les tangentes *s*-2, *s*-2.

Si le parallèle sur lequel on veut obtenir un point de tangence est au-dessous du cercle de gorge, le sommet du cône auxiliaire sera au-dessus du plan de ce parallèle. Le contraire aurait lieu si le parallèle donné était au-dessus du cercle de gorge, et dans ce cas le cône auxiliaire serait renversé, ce qui ne changerait rien à la manière d'opérer.

844. Si l'on faisait descendre le parallèle donné, le sommet du cône auxiliaire descendrait également, et l'angle au sommet de ce cône deviendrait plus ouvert.

D'un autre côté, la droite *sou*, *s'o'u'* se rapprocherait de la surface du cône, et lorsqu'elle serait arrivée dans cette surface, les deux plans tangents au cône auxiliaire coïncideraient, et les deux points de tangence, réunis en un seul, seraient situés dans le plan méridien qui contient le point donné. Ce point serait le plus bas de la courbe cherchée. Pour l'obtenir, on fera tourner le méridien *os* jusqu'à ce qu'il

soit rabattu sur le méridien principal ; et lorsque le point donné ss' sera parvenu en s'', on construira la tangente s''-3, génératrice du dernier cône auxiliaire. Le point de tangence 3, projeté en 3′ et ramené de là dans le méridien os, déterminera 3″ et 3‴ pour les projections du point le plus bas de la courbe.

La tangente s-4 donne le point 4′ qui, ramené en 4‴, sera le point le plus élevé.

Pour les parallèles au-dessus de 4′-4‴ et pour ceux au-dessous de 3′-3‴, la droite qui joindrait le point donné avec les sommets des cônes auxiliaires entrerait dans l'intérieur de ces cônes, et par conséquent elle ne pourrait déterminer aucun plan tangent.

845. Il y a deux cas dans lesquels la méthode précédente ne pourrait être employée :

1° Si le sommet du cône auxiliaire était dans le plan horizontal qui contient le point ss', ou très-près de ce plan, la droite $s'o$ serait horizontale ou très-près de cette position, et rencontrerait par conséquent très-loin le plan du parallèle sur lequel on veut obtenir des points de tangence ; on serait forcé, dans ce cas, de recourir à des constructions auxiliaires ;

2° Si le parallèle sur lequel on veut obtenir des points de tangence était très-près du cercle de gorge, le sommet du cône auxiliaire serait en dehors des limites de l'épure.

Dans chacun de ces deux cas on pourra opérer de la manière suivante :

846. *Méthode des sphères tangentes.* Supposons que l'on veuille obtenir les points de tangence qui sont situés sur le parallèle mn, on construira la droite nt qui touche la section méridienne au point n, puis on tracera nv perpendiculaire sur nt.

Le point v, provenant de la rencontre de nv avec l'axe de la surface de révolution, sera le centre d'une sphère qui touchera cette surface suivant la circonférence du parallèle mn. De sorte que tout plan qui toucherait la sphère en un point de ce parallèle serait tangent à la surface donnée (809). Il ne

reste donc plus qu'à choisir parmi tous ces plans ceux qui contiennent le point donné.

Or si on conçoit un cône circulaire qui enveloppérait la sphère et qui aurait pour sommet le point ss', les plans demandés devront toucher ce cône, et par conséquent les points de tangence seront à la rencontre du parallèle mn avec le petit cercle suivant lequel la sphère qui a nv pour rayon sera touchée par le cône auxiliaire qui a son sommet en ss'.

Pour éviter la projection elliptique de ce petit cercle, on rabattra le plan méridien qui contient le point donné jusqu'à ce que ce point soit parvenu en s'' dans le plan du méridien principal.

On construira les deux tangentes $s''z$, $s''x$ qui formeront les limites de la projection du cône auxiliaire sur le plan du méridien pq.

On déterminera bien exactement les deux points de tangence z et x, et la corde zx, qui joint ces deux points, sera la projection sur le plan rabattu os du petit cercle suivant lequel la sphère est touchée par le cône qui a son sommet en ss'. De sorte que le point 5, intersection des deux droites mn, zx, sera la projection commune aux deux points de tangence demandés. Il ne reste plus qu'à retrouver la place que chacun de ces deux points doit occuper sur la surface.

Pour y parvenir, projetons le point 5 sur la trace du méridien oq, et faisons revenir ce méridien dans la position os, le point $5'$ viendra se placer en $5''$ et la droite $5'''$-$5'''$, perpendiculaire sur os, sera la corde horizontale qui joint les deux points de tangence demandés. Les projections horizontales de ces points seront déterminées par les intersections de $5'''$-$5'''$ avec la circonférence qui représente la projection horizontale du parallèle mn.

Les verticales $5'''$-5^{IV}, $5'''$-5^{IV} détermineront sur mn les projections verticales des deux points de tangence.

847. Dans l'application des principes que nous venons d'exposer, il ne faudra pas accorder de préférence absolue à l'une des méthodes sur l'autre, et l'on pourra employer successivement chacune d'elles selon que l'on voudra obtenir un

point sur un méridien (839), sur un parallèle (843,846), ou dans un plan qui serait perpendiculaire au plan de projection et qui contiendrait le point donné (836).

848. Toutes les solutions précédentes auraient été plus simples si l'on avait pris un plan de projection parallèle au méridien qui contient le plan donné, parce que les parties vues et cachées de la courbe de contact se seraient confondues sur la projection verticale.

849. Si la surface proposée était du second degré, la courbe de contact serait aussi du second degré (*Algèbre appl.*), et dans ce cas elle se projetterait par une ligne droite sur tout plan qui serait parallèle au méridien dont le plan contient le point donné.

Ainsi, par exemple, proposons de *construire un plan tangent à une ellipsoïde de révolution par un point situé en dehors de cette surface*, et supposons que le point donné soit situé en $s''s'''$, **fig. 416**, la courbe de contact sera une ellipse projetée sur le plan vertical par la corde zx, le point c, milieu de zx, sera la projection verticale du petit axe dont les extrémités v, u seront déterminées par les intersections de la perpendiculaire abaissée du point c, avec la projection horizontale du parallèle cc'''.

850. Si le point donné était situé en ss', on ferait tourner le plan méridien qui contient ce point jusqu'à ce qu'il soit parvenu dans la position $s''s'''$; puis après avoir déduit de cette projection, le centre c, c', c'' de l'ellipse zx; le diamètre $v'u'$, égal à vu; enfin, le diamètre $z'x'$, égal à la projection horizontale de la corde zx; on construira la projection horizontale de la courbe demandée.

Sa projection verticale sera déterminée par la rencontre des verticales élevées par les différents points de l'ellipse, $v'z'u'x'$, avec les horizontales passant par les projections des mêmes points sur la corde zx.

851. *Construire un plan tangent à une surface de révolution parallèlement à une droite donnée.*

Cette question peut être considérée comme un cas particulier du problème précédent. Il suffit pour cela de supposer que le point donné *ss'*, **fig. 413, 414, 415** et **416**, soit reculé jusqu'à l'infini dans la direction de la droite donnée ; dans ce cas les cônes qui ont ce point pour sommet et qui enveloppent la surface seront transformés en autant de cylindres parallèles à la ligne donnée; de sorte qu'il ne restera qu'à déterminer les courbes suivant lesquelles la surface serait touchée par ces cylindres.

Nous allons indiquer plusieurs méthodes qui sont les conséquences naturelles de l'hypothèse qui vient d'être admise.

852. *Méthode des plans coupants*, **fig. 418, pl. 84.** On coupera la surface par un plan *p*, parallèle à la droite donnée *so,s'o'* ; pour plus de simplicité on prendra ce plan perpendiculaire à l'un des plans de projection, et l'on construira la courbe de section *aa* par l'un des moyens indiqués au n° 813.

On tracera, parallèlement à la droite donnée, toutes les tangentes qu'il sera possible de construire à la courbe obtenue, et l'on déterminera bien exactement les points de tangence 1',1'.... Ces points satisferont aux conditions demandées. On conçoit, en effet, que le plan tangent à l'un des points 1,1'... contiendrait la tangente correspondante, et serait par conséquent parallèle à la droite donnée. En coupant de nouveau la surface par d'autres plans, on obtiendra autant de points que l'on voudra.

Dans l'exemple proposé, la surface étant annulaire, on obtiendra deux courbes qui ont beaucoup d'analogie avec celles que nous avons trouvées au n° 839.

La première, *mm*, contient tous les points de tangence situés sur la portion de surface engendrée par le demi-cercle *vuz*. La deuxième, *nn*, appartient à la partie engendrée par le demi-cercle *vxz*.

Le plan coupant *p* détermine *quatre* points de tangence, savoir : deux sur la courbe *mm* et deux sur la courbe *nn*.

Le plan *p'* , tangent au cercle de gorge, contiendra *cinq* points de tangence, savoir :

Un sur le cercle de gorge,

Deux sur la courbe mm,

Deux sur la courbe nn.

Depuis le plan p' jusqu'au plan p'', tangent à la courbe nn, chaque section contient six points qui se réduisent à quatre dans le plan p''.

Enfin, du plan p'' au plan p''', chaque section n'en contiendra plus que deux.

Le plan vertical p''' ne déterminera qu'un point de tangence qui sera situé sur le plus grand parallèle de la surface.

Les quatre points 2, 2, 2, 2 devront être vérifiés de toutes les manières possibles. Les droites, menées par ces points parallèlement à la ligne donnée, seront tangentes à la courbe de contact, ce qui n'a lieu pour aucun autre point de la même courbe.

853. Nous n'avons indiqué, sur la figure, que des plans coupants verticaux, mais il est évident que l'on peut également faire usage des sections perpendiculaires au plan vertical de projection.

On pourra recourir à ce moyen lorsqu'il restera quelque incertitude sur la position des points cherchés, ce qui aura lieu toutes les fois que dans le voisinage de ces points la courbure de la section auxiliaire sera peu sensible.

On sera dispensé de construire les sections de la surface par les plans coupants auxiliaires, en opérant de la manière suivante :

854. *Méthode des cylindres projetants.* On prendra successivement chaque plan méridien pour plan auxiliaire de projection comme nous l'avons fait au n° 639 ; de sorte que la question sera réduite à construire, parallèlement à la droite donnée, des plans tangents aux cylindres horizontaux qui déterminent les diverses projections de la surface sur les plans des méridiens. Voici l'ordre des opérations:

La droite donnée, **fig. 417**, n'étant déterminée que par sa direction, il sera toujours permis de la placer dans le plan de l'un des méridiens de la surface, de sorte qu'elle couperait l'axe en un point oo', pris à volonté sur cet axe.

On choisira un second point quelconque ss' par lequel on abaissera la droite s-s'' perpendiculaire sur la trace du méridien C. Le point s'' ramené en s''' déterminera s^{IV}, de sorte que $s^{IV}o'$ sera la projection de la droite $so, s'o'$ sur le plan du méridien C rabattu en B.

Cela étant fait, on construira parallèlement à $s^{IV}o'$ toutes les tangentes qu'il sera possible de mener à la section méridienne de la surface. Ces lignes seront les intersections du plan C par autant de plans tangents au cylindre horizontal qui déterminerait le contour de la projection sur le plan du méridien C.

Les six points de tangence 1, 1, 1..., obtenus par l'opération précédente, seront projetés en 1′, 1′... sur la trace du méridien B ; on les ramènera de là en 1″, 1″... sur la trace du méridien C, d'où on déduira leurs projections verticales 1‴, 1‴, 1‴... En opérant de la même manière on obtiendra six points sur chacun des méridiens de la surface.

Ces points appartiennent à trois courbes *mm*, *nn*, *uu* que l'on reconnaîtra facilement à l'inspection de la projection verticale de la surface. L'exactitude du résultat dépendra du soin avec lequel les points de tangence auront été déterminés.

Les tangentes parallèles à la projection verticale $s'o'$ de la droite donnée détermineront les six points suivant lesquels la surface serait touchée par six plans perpendiculaires au plan vertical de projection et parallèles à la droite $so, s'o'$. Ces points auront leurs projections horizontales sur la trace du méridien B.

Si on fait tourner le méridien s-A jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le plan du méridien principal, le point s viendra se placer en s^{V}, d'où on déduira s^{VI}, de sorte que $s^{VI}o'$ sera la droite donnée, rabattue dans le plan du méridien B.

Cela étant fait, les six tangentes parallèles à $s^{VI}o'$ détermineront les points suivant lesquels la surface serait touchée par six plans parallèles à la droite so, $s'o'$ et perpendiculaires au plan du méridien s-A. Ces six points, projetés sur la trace du méridien B et ramenés de là dans le plan du méridien s-A, seront les points les plus élevés et les plus bas des trois courbes de contact.

Enfin, si on projette sur le plan horizontal le plus grand parallèle *zx* et les deux cercles de gorge *ac, vr* qui, dans l'exemple proposé, ont une projection horizontale commune, les intersections de ces trois cercles par le plan du méridien D détermineront six points suivant lesquels la surface serait touchée par six plans tangents aux trois cylindres verticaux qui touchent la surface suivant les parallèles *ac, zx*, *vr*, qui par conséquent devront contenir les points de tangence déterminés par cette dernière opération.

On devra, comme au n° 842, profiter de la disposition symétrique des plans méridiens. Ainsi les points obtenus dans le méridien B seront reportés à la même distance de l'axe sur la trace du méridien B′, d'où on déduira leurs projections verticales sur les parallèles correspondants. Les points obtenus dans le méridien C détermineront ceux qui sont placés à la même hauteur dans le plan du méridien C′.

855. *Méthode des cônes tangents.* La solution que nous venons d'expliquer permet d'obtenir les points qui appartiennent à un méridien déterminé, mais si on voulait trouver un point de tangence sur un parallèle, il faudrait opérer de la manière suivante. Nous reprendrons encore une fois pour exemple la surface annulaire que nous ne saurions trop étudier, puisqu'elle contient les éléments de toutes les autres surfaces de révolution (808).

La droite donnée étant déterminée par ses deux projections *s-o*, *s′-o′*, **fig. 419**, je suppose que l'on veut obtenir ceux des points de la ligne de contact qui sont situés sur le parallèle *vu*, *v′u′*. On tracera la droite *v′z* qui touche au point *v′* la section méridienne de la surface.

On fera tourner cette tangente autour de l'axe, et par ce mouvement on engendrera un cône circulaire qui touche la surface donnée dans toute l'étendue du parallèle *vu*, *v′u′*, de sorte que tout plan tangent au cône sera tangent à la surface en un point de ce parallèle. La question sera donc réduite à construire, parallèlement à la droite donnée, deux plans tangents au cône circulaire engendré par la droite *v′z* (612). Voici l'ordre des opérations :

1° On tracera la droite zh' parallèle à $s'o'$, cette ligne sera la projection verticale de l'intersection des deux plans tangents demandés;

2° On déterminera le point $h'h$ suivant lequel la droite zh', zh perce le plan du parallèle vu, $v'u'$ que nous prenons pour la base du cône auxiliaire;

3° On mènera par le point h deux tangentes à la projection horizontale de ce parallèle.

Les deux points de tangence 1, 1, déterminés avec toute l'exactitude possible, appartiendront à la courbe cherchée. Il ne restera plus qu'à obtenir les projections verticales de ces points en élevant les deux perpendiculaires 1-1′ jusqu'à leur rencontre avec le parallèle $v'u'$.

856. Le plan horizontal $v'u'$ contient encore deux autres points situés sur le parallèle ac, $a'c'$. Pour les obtenir on construira la tangente $c'x$ que l'on prendra pour génératrice d'un second cône auxiliaire qui toucherait la surface suivant le parallèle ac, $a'c'$.

On tracera la droite xr' parallèle à la ligne $o's'$. Cette ligne xr', intersection des deux plans tangents au cône auxiliaire qui a son sommet en x, percera le plan horizontal qui contient la base de ce cône en un point $r'r$, par lequel on construira les deux tangentes r-2, r-2. Cette opération déterminera les points 2, 2, dont on obtiendra les projections verticales en élevant les perpendiculaires 2-2′ 2-2′, jusqu'à la rencontre du parallèle $a'c'$.

Il ne restera plus qu'à répéter ces opérations pour obtenir autant de points que l'on voudra.

857. Les points les plus élevés des deux courbes s'obtiendront en construisant des tangentes à la section méridienne, parallèlement à la droite $s''o'$ qui représente la ligne donnée so, $s'o'$, rabattue dans le plan du méridien principal.

Ces tangentes sont les génératrices des derniers cônes auxiliaires.

858. *Méthode des sphères tangentes.* Si nous prolongeons

les rayons *ec'* du cercle générateur de la surface jusqu'à sa rencontre avec l'axe, nous obtiendrons un point *o'*, et la circonférence décrite de ce point comme centre avec le rayon *o'c'* sera la projection d'une sphère tangente à la surface suivant la circonférence du parallèle *ac*, *a'c'*; de sorte que tout plan qui toucherait la sphère en un point de ce parallèle serait tangent à la surface donnée. Il ne reste donc plus qu'à choisir, parmi tous les plans qui satisfont à cette condition, ceux qui seraient parallèles à la droite *so*, *s'o'*.

Or, si par le centre de la sphère nous construisons la droite *os*, *o's'* parallèle à la ligne donnée, et que nous rabattions cette droite dans le plan du méridien principal, le diamètre *nn* perpendiculaire sur *o's''* représentera dans ce rabattement la projection du grand cercle suivant lequel la sphère auxiliaire est touchée par tous les plans parallèles à la droite *os*, *o's'*, rabattue en *o's''*.

Mais le cercle *nn* et le parallèle *a'c'*, appartenant tous deux à la sphère, se coupent en deux points qui, sur le rabattement, se projettent en un seul point 2'', et qui sont les deux points demandés. Il ne reste plus qu'à faire revenir ces points à la place qu'ils doivent occuper sur la surface donnée.

Pour atteindre ce but, nous remarquerons d'abord qu'ils doivent être situés tous les deux sur le parallèle *ac*, *a'c'*.

De plus, le point 2'' étant projeté en 2''' et ramené en 2^{iv}, sera le milieu de la corde 2-2 qui joint les deux points projetés en 2'' sur le rabattement.

Enfin on tracera la corde 2-2 perpendiculaire sur *os*.

Les deux intersections de cette corde avec le parallèle *ac* détermineront les projections horizontales 2, 2 des points cherchés; leurs projections verticales s'obtiendront en élevant les deux perpendiculaires 2-2', 2-2'.

Le rayon *u'e*, prolongé jusqu'à sa rencontre avec l'axe, détermine un point *l* que l'on prendra pour centre d'une seconde sphère auxiliaire, tangente à la surface donnée suivant la circonférence du parallèle *vu*, *v'u'*. La droite *mm*, perpendiculaire sur *o's''*, est la projection sur le plan *os*, rabattu en *ou*, d'une partie du grand cercle, suivant lequel la sphère qui a pour rayon *lu'* serait touchée par tous les

plans parallèles à la droite donnée rabattue en $o's''$. La circonférence mm coupera le parallèle $v'u'$ en deux points qui se projettent tous deux en $1''$ et qui satisfont aux conditions demandées.

La perpendiculaire $1''$-$1'''$ détermine $1'''$ qui, ramené en 1^{IV}, sera le milieu de la corde qui joint les deux points cherchés 1, 1 ; on tracera cette corde perpendiculaire sur os, ce qui donnera sur le parallèle vu les projections horizontales 1, 1 de ces points. Enfin, les deux perpendiculaires 1-1', 1-1' donnent les projections verticales 1', 1'.

859. L'emploi d'une sphère tangente comme surface auxiliaire serait utile surtout dans le cas où l'on voudrait obtenir un point de tangence sur un parallèle qui serait très-près du cercle de gorge ou du plus grand parallèle, parce que dans ce cas le sommet du cône tangent employé dans la troisième méthode se trouverait très-loin en dehors de l'épure, et l'on ne pourrait plus construire la droite intersection des deux plans tangents demandés.

860. Il est évident que les opérations précédentes pourraient être simplifiées si on prenait un plan de projection parallèle à la ligne donnée. C'est uniquement pour exercer que l'on a choisi une disposition différente.

861. *Construire un plan tangent à l'hyperboloïde de révolution parallèlement à la droite* so, s'o', **fig. 420.**

Si on veut obtenir les points de tangence sur un méridien ou sur un parallèle donné, on construira ces courbes et l'on fera pour le reste comme nous l'avons dit aux nos 854, 855 et 858. Mais si on veut obtenir le point de tangence sur une génératrice ac, $a'c'$, il faudra opérer de la manière suivante :

Par un point quelconque uu', pris sur la génératrice donnée, on construira la droite uv, $u'v'$ parallèle à la ligne donnée so, $s'o'$. Le plan p, qui contient les deux droites (au, $a\,u'$) (uv, $u'v'$), sera le plan tangent demandé.

En effet, la droite cx, parallèle à la trace horizontale du

plan p, coupera le parallèle acx en un point x par lequel on pourra toujours construire une droite xz, $x'z'$ qui appartient à la seconde génération de la surface (803).

De plus, ces deux droites se coupant au point mm', elles sont situées toutes deux dans le plan p et peuvent être considérées comme les deux tangentes qui déterminent ce plan (779). Les points m, m' sont les deux projections du point de tangence demandé.

862. L'hyperboloïde de révolution étant une surface du second degré, il résulte du principe que nous avons énoncé au n° 849, que la courbe suivant laquelle cette surface serait touchée par un cylindre ou par un cône sera elle-même du second degré ; de sorte qu'elle se projettera toujours par une ligne droite sur un plan perpendiculaire à celui qui la contient. Cette remarque peut donner lieu à des abréviations.

863. *Par une droite donnée, construire un plan tangent à une surface de révolution.*

1re *méthode.* Étant données la surface A et la droite a, **fig. 425, pl. 85,** on prendra sur la droite un point quelconque s et l'on construira (835) la courbe vu suivant laquelle la surface serait touchée par le cône qui aurait son sommet en s ; il ne restera plus qu'à construire par la droite donnée des plans tangents au cône (611).

Pour y parvenir on coupera ce cône par un plan quelconque, et l'on construira la courbe de section zx (615) ; on déterminera pareillement le point m suivant lequel ce plan coupe la droite a, et l'on tracera les deux droites mz, mx tangentes à la courbe de section. Chacune de ces tangentes et la droite donnée détermineront un plan qui satisfera aux conditions du problème.

Dans l'exemple représenté sur la figure **425**, il n'y aurait que deux solutions ; mais il est évident que pour certaines surfaces de révolution dont la section méridienne aurait beaucoup de sinuosités, il pourrait y avoir un plus grand nombre de plans tangents.

864. 2e *méthode.* Au lieu d'un cône on pourrait employer un cylindre auxiliaire qui serait parallèle à la droite donnée ; cela reviendrait à supposer que le sommet du cône est reculé sur cette droite jusqu'à l'infini.

865. 3e *méthode.* On prendra sur la droite donnée *a*, **fig. 424**, un point quelconque *s*, et considérant ce point comme le sommet d'un cône qui envelopperait la surface, on construira la courbe de contact *vu*. On prendra ensuite sur la même droite un autre point quelconque *t* pour sommet d'un second cône qui envelopperait la surface, et l'on construira la courbe de contact *zx*. Les points communs à ces deux lignes de contact détermineront les plans tangents demandés.

En effet, le plan qui toucherait la surface donnée au point *m*, par exemple, devrait contenir toutes les tangentes à ce point. Il contiendrait donc la droite *ms* qui est une génératrice du premier cône auxiliaire, et qui par conséquent est une tangente de la surface ; par conséquent il passerait par le point *s*. De plus, il contiendrait la droite *mt*, génératrice du second cône auxiliaire, et passerait par le point *t*, sommet de ce cône ; donc il contiendrait la droite *st*.

866. 4e *méthode.* On pourrait remplacer l'un des cônes auxiliaires par un cylindre parallèle à la droite donnée, ce qui reviendrait à supposer que l'un des deux points *s* ou *t* est situé à l'infini. Les moyens de construire les lignes de contact ayant été exposés dans les articles 835, 836, etc., je me bornerai à faire l'application des principes précédents à quelques cas particuliers.

867. Supposons qu'il s'agisse, **fig. 421**, de *construire par la droite* bb′ *deux plans tangents à une ellipsoïde de révolution* A, A′, et proposons-nous d'appliquer le principe du n° 863.

1re *méthode.* Nous admettrons d'abord que le sommet *ss′* du cône auxiliaire pouvant être pris à volonté, il sera permis de choisir ce point dans le plan du méridien principal ; de

sorte que la courbe de contact se projettera sur le plan vertical par une droite zx (849). Il faut maintenant couper le cône et la droite bb' par un plan quelconque, et construire, par le point où la droite bb' perce ce plan, des tangentes à la courbe suivant laquelle ce même plan coupe le cône. Nous allons chercher quelle doit être la direction du plan coupant pour que les opérations soient les plus simples possible.

Pour résoudre cette partie de la question, concevons le cylindre vertical C, qui touche la surface donnée suivant son plus grand parallèle tr. Les génératrices qui forment les limites des projections du cylindre et du cône auxiliaire se couperont aux quatre points a', a'', a', a'', qui seront les sommets d'un quadrilatère circonscrit à la projection verticale de l'ellipsoïde.

Nous admettrons que *dans un quadrilatère circonscrit à une ellipse ou à un cercle, les cordes qui joignent les points de tangence opposés passent par le point d'intersection des deux diagonales.* (Algèbre appl.)

D'après cela, supposons que les droites zx, tr, $a'a'$, $a''a''$ soient les traces de quatre plans perpendiculaires au plan vertical de projection.

La section de l'ellipsoïde et du cône par le plan pq sera l'ellipse zx. Le point ee', suivant lequel cette ellipse coupe le parallèle tr, appartient au cylindre projetant C.

Il résulte de là que les deux ellipses suivant lesquelles le cylindre et le cône sont coupés par le plan pq doivent coïncider, puisqu'elles ont un axe commun $a'a'$, et un point commun en ee'. De plus, cette ellipse, commune aux deux surfaces, étant située sur le cylindre, aura pour projection horizontale la circonférence aa.

La relation précédente serait encore vraie si le sommet du cône auxiliaire était situé dans l'intérieur du cylindre C ; mais alors les deux courbes tr, zx ne se couperaient pas, et l'on ne pourrait plus raisonner de la même manière. Dans ce cas, il serait utile de recourir à l'algèbre pour démontrer que la courbe suivant laquelle le plan pq coupe le cône auxiliaire est en même temps située sur le cylindre C, et se projette par conséquent par un cercle aa. Cela étant

admis, il est évident que la courbe *aa*, *a'a'* sera la directrice la plus simple que nous puissions prendre pour le cône auxiliaire.

L'intersection du plan *pq* par la droite donnée *bb'* sera un point *mm'* par la projection horizontale duquel on construira les deux tangentes *mo*, *mc*. Les projections verticales de ces lignes se confondront avec la trace du plan *pq*. Enfin, chacune de ces tangentes avec la droite donnée déterminera un des plans tangents demandés par la question.

Les deux points *o*, *c*, projetés en *o'* et *c'*, détermineront les deux droites (*so*, *s'o'*) (*sc*, *s'c'*) suivant lesquelles les deux plans tangents touchent le cône auxiliaire ; et les points *nn'*, *uu'*, suivant lesquels ces droites coupent l'ellipse *zx*, sont les points de tangence sur l'ellipsoïde.

868. 2e *méthode*. On pourra prendre pour directrice du cône auxiliaire la ligne de contact *zx*; dans ce cas les plans tangents seraient déterminés par la ligne donnée *bb'* et par chacune des deux tangentes menées par le point où cette droite perce le plan *p''q''*. On pourra éviter la projection elliptique de l'ellipse *zx* en employant un plan auxiliaire sur lequel cette projection serait un cercle (541).

869. 3e *méthode*. Si l'on suppose la surface enveloppée par deux cônes auxiliaires (865), on pourra disposer les opérations de la manière suivante, **fig. 423** :

Il sera toujours permis de prendre pour sommet de l'un des deux cônes le point *tt'* suivant lequel la droite donnée *bb'* perce le plan horizontal qui contient le plus grand parallèle de la surface. Dans ce cas la courbe de contact sera une ellipse qui se projettera sur le plan horizontal par la corde *cc*.

On prendra ensuite pour sommet du second cône auxiliaire le point *ss'*, suivant lequel la droite *bb'* perce le plan du méridien principal, de sorte que la seconde courbe de contact aura pour projection verticale la corde *aa*.

Les points de tangence devant appartenir aux deux ellipses *aa*, *cc* (865), doivent se trouver par conséquent sur l'intersec-

tion des deux plans uvp, $u'v'p'$ qui contiennent ces courbes. Ces deux plans étant perpendiculaires aux plans de projections, sont les plans projetants de leur intersection qui alors sera projetée par les deux droites uv, $u'v'$.

Il ne reste donc plus qu'à chercher les points suivant lesquels cette droite coupe l'une des deux courbes de contact cc, aa. Nous choisirons la dernière de ces deux lignes, et pour éviter la construction de l'ellipse qui résulterait de sa projection ou de son rabattement, nous chercherons la position du plan sur lequel sa projection serait un cercle (541).

Ainsi, après avoir déterminé le centre o' nous rabattrons le parallèle qui contient ce point, et l'ordonnée $o'z$ sera le demi-petit axe de l'ellipse aa. Nous construirons le triangle rectangle $o'a'a$ en faisant le côté $o'a'$ de l'angle droit égal à $o'z$. De sorte que $o'a'$ étant la projection de $o'a$, la droite $u''v''$ sera la trace du plan sur lequel l'ellipse aa se projettera par un cercle.

En faisant tourner ce plan autour de l'horizontale projetante du point v'', la circonférence $a''a''$ sera la projection de l'ellipse aa sur le plan $v''u''$.

Les deux points vv', uu', pris à volonté sur la droite uv, u',v' se projetteront par v'' et u'', et le dernier se rabattra en u''' de sorte que $v'''u'''$ sera la projection de la droite uv, $u'v'$ sur le plan auxiliaire $u''v''$.

Les intersections m''', n''' de $v'''u'''$, avec la circonférence $a''a''$, seront par conséquent les deux points de tangence demandés que l'on fera revenir d'abord en m'' et n'' dans le plan $u''v''$, puis de là sur la courbe de contact aa par les deux perpendiculaires $m''m'$, $n''n'$.

Les projections horizontales m et n de ces points seront déterminées, sur la seconde courbe de contact cc, par les droites $n'''n$, $m'''m$ parallèles à la ligne AZ, et qui représentent les projections des arcs de cercle parcourus par ces points ; enfin sur les droites $m'm$, $n'n$ perpendiculaires à la ligne AZ.

870. *Construire un plan tangent à une surface de révolution et parallèle à un plan donné.*

Soient, **fig. 422**, le plan p donné et AA′ la surface donnée; construisons la droite ac, $a'c'$ perpendiculaire au plan donné, il ne restera plus qu'à choisir, parmi tous les plans perpendiculaires sur ac, $a'c'$, celui qui serait tangent à la surface donnée.

Pour satisfaire à cette dernière condition, concevons la droite ac, $a'c'$ rabattue en $a'c''$, dans le plan du méridien principal, la tangente su, perpendiculaire sur $a'c''$, représentera dans ce rabattement l'intersection du plan cherché par le plan méridien ac; nous ferons revenir la droite su dans ce méridien, ce qui nous donnera le point u'' par lequel nous construirons la trace horizontale du plan demandé p'.

Ce plan devant contenir le point s, sa trace verticale sera facile à déterminer. De plus, cette trace verticale devra être parallèle à celle du plan p, et par conséquent perpendiculaire sur $a'c'$.

Le point de tangence m'', étant ramené dans le plan du méridien ac, deviendra mm'. La droite mc, $m'z$, perpendiculaire sur le plan p', sera la normale et sera parallèle à la droite donnée ac, $a'c'$. Dans l'exemple que nous avons choisi il y aurait un second plan tangent au point nn'.

Pour certaines surfaces de révolution il pourrait y en avoir davantage. Il est évident qu'il y aura autant de solutions que l'on pourra construire de tangentes à la section méridienne perpendiculairement à la droite $a'c''$.

871. *Projection oblique des surfaces de révolution.* Lorsqu'on veut exécuter un solide de révolution, il faut le projeter de la manière la plus simple, et dans ce cas on doit prendre un plan de projection perpendiculaire à son axe; mais lorsqu'il est nécessaire de projeter le corps dans une position inclinée, les opérations deviennent plus difficiles. Les dessinateurs se contentent ordinairement dans ce cas, de concevoir la surface coupée par un certain nombre de plans perpendiculaires à son axe. Chaque section circulaire a pour projection une ellipse, et la courbe tangente à toutes ces ellipses forme le contour de la projection.

Cette manière d'opérer convient évidemment pour les

arêtes circulaires de la surface ; mais pour les autres, elle ne donne le contour de la projection que d'une manière approximative, et laisse de l'incertitude sur la position de certains points singuliers dont nous parlerons bientôt.

872. Pour ne pas augmenter, sans nécessité, le nombre des planches, nous choisirons un exemple qui contienne à peu près toutes les variations de courbure, et nous proposerons dans ce but de construire les deux projections du balustre dont la section méridienne est projetée, **fig. 427, pl. 86.**

Les données sont :

1° La section méridienne dont nous venons de parler ;

2° Les deux projections *ac*, *a'c'* de l'axe de la surface.

Voici quel doit être l'ordre des opérations.

873. *Projection auxiliaire*, **fig. 427.** On commencera par construire la section méridienne sur un plan vertical AZ', parallèle à la droite *ac*, *a'c'*.

Pour obtenir l'inclinaison de cette projection, il suffira de projeter deux points quelconques de la ligne *ac*, *a'c'*.

On projettera ensuite la surface sur un plan perpendiculaire à son axe, et l'on rabattra cette nouvelle projection, **fig. 430.**

Quand l'épure sera disposée comme nous venons de le dire, on commencera les opérations nécessaires pour déterminer les deux projections obliques.

874. *Projection horizontale*, **fig. 428.** Les limites de cette projection étant les traces des surfaces cylindriques perpendiculaires au plan horizontal et tangentes à la surface donnée, la question se réduit à l'application des principes exposés aux n°s 851, 852, etc.

1re *opération*. Par un point quelconque *o''*, pris à volonté sur l'axe *a''c''*, **fig. 427,** on construira la droite *o''u'*, perpendiculaire au plan horizontal AZ'. La projection de cette droite sur la figure **450** sera *o'''u*.

2e *opération*. On déterminera sur les deux projections 427 et 430 toutes les courbes suivant lesquelles les différentes parties de la surface donnée seront touchées par autant de surfaces cylindriques parallèles à la droite $o''u'$, $o'''u$, et par conséquent perpendiculaires au plan horizontal de projection.

Ces courbes sont au nombre de trois, savoir : la première mn, sur la portion de surface qui forme le col du balustre ; la seconde courbe zx est située sur la partie convexe de la surface, et la troisième vr appartient à la scotie.

Ces trois courbes ont beaucoup d'analogie avec celles que nous avons obtenues sur la surface annulaire, et devront par conséquent être construites par les principes exposés aux nos 851, 852, etc.

Les trois courbes dont nous venons de parler étant coupées symétriquement par le plan méridien pu, les parties vues et cachées de ces courbes se confondront sur la projection 427.

875. Dans l'exemple qui nous occupe, nous avons supposé que la zone convexe du balustre était une portion d'ellipsoïde de révolution, d'où il résulte que la ligne de contact est une courbe plane, et par conséquent se projettera sur la figure **427** par une ligne droite zx.

876. Quand les trois courbes précédentes seront obtenues sur les deux projections 427 et 430, on fera tourner cette dernière figure pour la ramener dans la position de la figure **431**, et tous les points du contour de la projection horizontale de la surface seront alors déterminés par les intersections de deux systèmes de lignes, les unes parallèles, les autres perpendiculaires à la ligne AZ′ et menées par les points correspondants des deux figures **427** et **431**.

877. *Points de rebroussement*. Les projections horizontales des courbes, situées sur le col du balustre et sur la scotie, contiennent chacune quatre points de rebroussement ; pour

mieux faire comprendre la forme de ces courbes, on les a transportées **fig. 432**.

878. On pourra trouver singulier qu'il y ait sur la projection horizontale des points de rebroussement qui n'existent pas sur la projection verticale correspondante, mais cela est très-facile à concevoir ; en effet, si la courbe elle-même contenait un ou plusieurs points de rebroussement, on devrait s'attendre à retrouver des points analogues sur toutes les projections de la même courbe ; mais ici, aucune des deux courbes dont il s'agit ne contient de points de cette espèce, et ceux qui existent sur leurs projections horizontales proviennent de ce que, pour ces points, la perpendiculaire projetante parallèle à $o''u'$, $o'''u$ se confond avec la tangente à la courbe.

Supposons, par exemple, que l'on ait obtenu, **fig. 429**, les deux projections d'une courbe à double courbure aoa, la droite bh étant la tangente au point o. Si l'on tire les deux extrémités a, a en les écartant l'une de l'autre comme pour rectifier la courbe, on lui fera prendre la forme indiquée par les deux projections $a'a'$, et la tangente deviendra $b'h'$.

Or, par suite du mouvement de rotation de la tangente il peut y avoir un instant où cette ligne étant perpendiculaire au plan vertical, sa projection sur ce plan se réduit à un point.

Les deux projections de la courbe deviennent alors $a''a''$, et le point de rebroussement o'' est la projection verticale de la tangente.

879. Ainsi, les points de rebroussement de la projection horizontale, **fig. 428**, sont les projections des points suivant lesquels les deux courbes mm, vr, sont touchées par des parallèles à la droite $o''u'$, $o'''u$, **fig. 427**, **430**.

Il est essentiel de déterminer ces points avec toute l'exactitude possible sur les quatre projections 427, 430, 431 et 428, et de s'assurer qu'ils sont bien liés entre eux par les lignes de projection correspondantes ; s'il y avait quelque irrégularité à cet égard, cela indiquerait une erreur dans la

construction des courbes ; il faudrait alors en chercher la cause et la faire disparaître. Ces vérifications ont été conservées sur l'épure pour les points 1 et 2 seulement.

880. Les projections horizontales des arêtes circulaires se construiront comme nous l'avons dit au n° 545.

881. *Projection verticale*, **fig. 426**. Le contour de cette projection se compose des traces des divers cylindres tangents, perpendiculaires au plan vertical de projection ou parallèles à une droite qui serait elle-même perpendiculaire à ce plan. Voici quel sera l'ordre du travail :

1re *opération*. La droite *os*, perpendiculaire au plan vertical de projection, se projettera sur ce plan par un seul point *o'*, et sur le plan auxiliaire, **fig. 427**, par la droite $o''s''$, parallèle à AZ'.

Pour avoir la projection de la même droite sur les deux figures **430** et **431**, on construira les deux triangles rectangles qui ont pour côtés $s'''e = s''e'$, **fig. 427**, et $o'''e = oh$, **fig. 428**.

L'hypoténuse $o'''s'''$ sera la projection de la droite *os*, $o''s''$ sur les plans des figures **427** et **431**, perpendiculaires à l'axe du balustre.

2e *opération*. On déterminera sur les figures **427** et **430** les courbes suivant lesquelles les surfaces de révolution du balustre sont touchées par des plans parallèles à la droite $o''s''$, $o'''s'''$ (851 et 852).

Ces lignes seront les directrices des cylindres projetants, perpendiculaires au plan vertical de projection.

3e *opération*. On reportera les courbes précédentes de la figure **430** à la figure **431**, et leurs projections horizontales seront déterminées, sur la figure **428**, par les intersections des lignes de projection parallèles et perpendiculaires à AZ', menées par les points correspondants des figures **427** et **431**.

4e *opération*. Quand on aura construit avec beaucoup d'exactitude, sur la figure **428**, les projections horizontales

des trois courbes de contact, il ne restera plus qu'à obtenir leurs projections verticales sur la figure **426**.

Pour y parvenir, on élèvera des perpendiculaires à la ligne AZ par tous les points de la projection horizontale, **fig. 428**, et la hauteur de chacun de ces points sera donnée par sa projection auxiliaire, **fig. 427**.

882. Les projections verticales des deux courbes, situées sur le col du balustre et sur la scotie, ont chacune quatre points de rebroussement qui sont les projections des points suivant lesquels chacune de ces courbes est touchée par des droites parallèles à la ligne *os*, *o″s″*, et par conséquent perpendiculaires au plan vertical de la figure **426**.

Il sera donc essentiel de vérifier la position de chacun de ces points sur les cinq projections 427, 430, 431, 428 et 426.

Les arêtes circulaires du ballustre se projettent sur la figure **426** par des ellipses semblables.

Les diamètres de ces ellipses se déduiront facilement de leurs projections horizontales.

On remarquera que pour chaque ellipse, le grand axe est perpendiculaire à la droite *a′c′*.

On peut, connaissant le grand axe et un point, construire avec beaucoup de précision l'une de ces ellipses ; puis, après avoir déterminé le second axe, on obtiendra les axes de toutes les autres ellipses en opérant comme au n° 554.

Les projections d'un même cercle sur les deux figures **426** et **428** doivent être touchées par les mêmes droites perpendiculaires à la ligne AZ.

883. Si l'on a de la place, on peut employer une seconde projection auxiliaire perpendiculaire au plan vertical de projection et parallèle à la droite *a′c′*.

Cela dispensera de construire sur la projection horizontale les courbes suivant lesquelles la surface est touchée par les cylindres projetants parallèles à la droite *os*, *o″s″*.

884. Si au lieu de construire les plans tangents parallèlement à une droite donnée, on les avait fait passer par un

point, les courbes obtenues dans ce cas auraient déterminé le contour de la figure suivant laquelle on apercevrait la surface si l'œil coïncidait avec le point donné.

Cette question, qui se rattache à la perspective, trouvera plus tard son application.

885. *Construire l'intersection d'une surface de révolution par une droite*, **fig. 434, pl. 87.**

1re *méthode*. On coupera la surface par un plan p, contenant la droite donnée bb' et perpendiculaire au plan vertical de projection.

La projection horizontale *odue* de la courbe de section pourra être obtenue en opérant comme nous l'avons dit au n° 784.

Les deux points n, n, suivant lesquels cette courbe est rencontrée par la projection b de la droite donnée, seront les projections horizontales des points cherchés.

Les projections verticales n', n' de ces points seront situées sur la trace verticale du plan auxiliaire p.

On fera bien, comme vérification, de construire les parallèles correspondants à ces points.

886. 2e *méthode*. Si la projection horizontale de la droite donnée rencontrait celle de la courbe de section, suivant des angles trop aigus, on rabattrait le plan auxiliaire p autour de sa trace horizontale.

Par suite de ce mouvement, la courbe deviendrait $o''d''u''e''$, et serait rencontrée par la droite b'' en deux points n'', n'' qui, ramenés dans le point p, donneront $n'n$, $n'n$ pour les projections des points demandés.

887. 3e *méthode*. Toutes les fois que la courbe de section de la surface donnée, par le plan auxiliaire, sera une ellipse, on pourra éviter la projection et le rabattement de cette courbe, en la projetant sur un plan p', incliné de manière que la projection soit une circonférence de cercle. On obtiendra la direction du plan p' en construisant le triangle rec-

tangle $o'xu'$, dans lequel le côté $u'x$ est égal au petit axe de l'ellipse $o'u'$ (541).

Le plan p' étant rabattu autour de sa trace horizontale, la courbe de section se projette dans ce rabattement par la circonférence tr, et les intersections de cette ligne par la droite b''' déterminent les deux points cherchés n''', n''' qui, ramenés d'abord dans le plan p' et de là dans le plan p, deviennent $n'n$, $n'n$.

888. 4e *méthode.* On peut employer, comme surface auxiliaire une hyperboloïde de révolution engendrée par la droite donnée, et qui aurait le même axe que la surface donnée, **fig. 433.**

En amenant successivement la droite donnée bb' dans les deux plans verticaux pp et $p'p'$, on aura les asymptotes cc', dd' du méridien principal. Il sera facile (387) de construire une partie $xs'u$ de ce méridien, puisque l'on connaît les asymptotes et le point ss' du cercle de gorge dont le rayon os est égal à la perpendiculaire os'' abaissée du point o sur la projection horizontale bb de la droite donnée.

La surface donnée sera coupée par l'hyperboloïde auxiliaire suivant les parallèles zx, vu (810), et les intersections $m'm$ de ces deux cercles, par la droite bb', seront les points demandés par la question.

889. Dans quelques cas particuliers les opérations peuvent être plus simples. Ainsi, par exemple, **fig. 434,**

Si la projection horizontale de la droite donnée passait par le point i, on en conclurait que cette ligne rencontre l'axe, et, dans ce cas, on emploierait comme surface auxiliaire le plan méridien is. Ce plan couperait la surface donnée suivant une section méridienne dont l'intersection $m'm$, avec la droite is, $i's'$, serait le point demandé.

Il est évident que l'on serait dispensé de construire la section méridienne en rabattant la droite donnée is, $i's'$, en $i's''$; cette opération donnera m'', qui, ramené dans le plan is, deviendra $m'm$.

890. Enfin, si la droite donnée était située dans un plan

perpendiculaire à l'axe, on emploierait ce plan comme surface auxiliaire, et dans ce cas la courbe de section serait un cercle.

891. *Construire l'intersection d'une surface de révolution par une courbe quelconque.*

1re *méthode.* On pourra employer, **fig. 434,** comme surface auxiliaire, l'un des cylindres projetants de la courbe donnée a, a'. L'intersection $v'y$, avec la surface donnée, se construira en élevant des perpendiculaires par les points où la projection a de la courbe donnée rencontre les projections des parallèles de la surface.

Les intersections de la courbe $v'y$ avec a' donneront les points cherchés $z'z$.

892. 2e *méthode.* On peut employer, **fig. 433**, comme surface auxiliaire, une seconde surface de révolution ayant le même axe que la surface donnée.

En opérant comme nous l'avons dit au n° 797, on construira la partie du méridien 1'-2'-3'. Les intersections de cette courbe avec le méridien principal de la surface donnée détermineront les deux parallèles communs $x'n'$ et $r'n'$, les points cherchés $n'n$ résulteront de la rencontre de ces parallèles avec la courbe donnée b, b'.

893. *Section par un plan oblique.* On emploiera comme surfaces auxiliaires des plans perpendiculaires à l'axe de la surface de révolution. Soient **(fig. 435)** la surface annulaire A, A', et le plan B. Un plan horizontal p coupera la surface suivant deux cercles (c, c') (c, c'), et le plan donné suivant la droite aa'. Cette droite coupera les deux cercles en quatre points (m, m') m, m')..... qui satisferont à la question proposée. Un second plan horizontal donnera quatre nouveaux points, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait obtenu un nombre de points suffisant pour construire correctement la courbe de section.

894. Il ne faut pas oublier que nous raisonnons toujours ici

d'une manière générale ; mais dans l'exécution de l'épure il se présente souvent des circonstances particulières qui engagent à modifier le principe et à recourir à des constructions auxiliaires. Ainsi dans l'exemple proposé, lorsqu'on arriverait dans le voisinage des points uu' et vv', les intersections se feraient suivant des angles trop aigus. Dans ce cas, on pourrait employer comme auxiliaires des plans verticaux passant par l'axe de la surface donnée : ces plans couperont la surface suivant des sections méridiennes dont on évitera la projection en les rabattant autour de l'axe. C'est ainsi que les points (uu') (vv') ont été déterminés. Le premier de ces points est le plus élevé et le second est le plus bas de la courbe d'intersection. Un plan vertical p'' a coupé la surface donnée suivant une section méridienne qui, en tournant autour de l'axe, est venue se confondre avec la projection verticale c'' du méridien principal. La droite provenant de l'intersection du plan B et du plan auxiliaire p'' est venue se rabattre en a'', et l'intersection de cette ligne a'' avec la section méridienne c'' a donné deux points s', z' qui, projetés horizontalement en s, z, et ramenés dans le plan p'', ont déterminé les points (uu') (vv'). Les points xx', oo', situés dans le plan méridien p''', ont été déterminés de la même manière.

Ainsi, on devra employer la première méthode quand on voudra obtenir un point sur un parallèle de la surface, et l'on emploiera la seconde quand il s'agira de trouver un point sur un méridien.

895. On peut quelquefois trouver dans la définition ou dans les propriétés de certaines surfaces des moyens d'exécution particuliers. Ainsi, par exemple, s'il s'agissait de construire, **fig. 436**, la section de l'hyperboloïde par le plan B, on pourrait, comme précédemment, faire usage de plans perpendiculaires à l'axe ou de plans méridiens ; mais on pourrait encore employer des plans, coupant l'hyperboloïde suivant les génératrices de cette surface. Ainsi, pour obtenir le point (mm'), on a construit un plan $po'p$ coupant l'hyperboloïde, suivant la génératrice $v'o'$, vo, et le plan B suivant la droite bb'; l'intersection de ces deux lignes a donné le

point (m, m') ; il est évident que cela revient à chercher la suite des points suivant lesquels le plan B est percé par chacune des droites génératrices de l'hyperboloïde.

Les points (n, n') (s, s') ont été déterminés par le plan horizontal p'.

Enfin, en faisant une section par un plan méridien perpendiculaire au plan B, et rabattant cette section comme nous l'avons fait dans l'épure précédente, on obtiendrait le point le plus élevé et le point le plus bas de la courbe.

896. Courbes de pénétration. — *Intersections d'une surface de révolution et d'un cylindre.* On emploiera comme surfaces auxiliaires des cylindres parallèles au cylindre donné, ayant pour directrices les parallèles de la surface de révolution. Ainsi, par exemple, **fig. 437, pl. 88**, la circonférence du cercle dont la projection verticale est $a'b'$, étant prise pour directrice d'un cylindre parallèle au cylindre donné, la trace horizontale de ce nouveau cylindre sera une circonférence ayant son centre en d, et pour rayon $du = c'b'$; les points x, v, suivant lesquels se rencontrent les traces des deux cylindres, détermineront deux lignes droites communes aux surfaces de ces cylindres, et les intersections de ces droites avec le cercle ab, $a'b'$, feront connaître les deux points $m'm$ de la courbe demandée. On obtiendra par ce moyen autant de points que l'on voudra.

Les traces des cylindres auxiliaires auront tous leurs centres sur une même droite zc, parallèle à la projection horizontale du cylindre donné, et passant par le point où l'axe de la surface de révolution perce le plan horizontal.

Si l'on prend le milieu de chacun des arcs de cercle qui résultent des intersections de la trace du cylindre donné avec les traces des cylindres auxiliaires, on obtiendra une courbe on qui aboutira sur la trace du cylindre donné en un point o. La droite oz normale à ce point déterminera en z le centre de la trace horizontale du cylindre auxiliaire sur la surface duquel se trouve le point le plus élevé de la courbe.

Le point le plus bas se déterminera en prolongeant la courbe on de l'autre côté, jusqu'au point n, par lequel

on mènera une normale *ns*, et le point *s* sera le centre de la trace du cylindre auxiliaire qui détermine le point le plus bas.

897. *Intersection d'une surface de révolution et d'un cône.* On emploiera comme surfaces auxiliaires des cônes ayant le même sommet que le cône donné, et pour directrices les parallèles de la surface de révolution. Ainsi, fig. 438, le cercle dont la projection verticale est $a'b'$, étant pris pour la directrice d'un cône dont le sommet serait (s, s'), la trace horizontale de ce cône sera une circonférence de cercle dont le centre d sera déterminé par l'intersection de la droite sc, $s'c'$, avec le plan horizontal, et qui aura pour rayon $du = d'u'$. Cette circonférence coupera la trace du cône donné, suivant deux points v, x ; en joignant ces points avec le sommet commun des deux cônes, on obtiendra deux droites dont les intersections avec le cercle ab, $a'b'$ appartiendront à la courbe demandée.

Il n'y aura plus qu'à recommencer cette construction pour avoir de nouveaux points de la courbe : les traces des cônes auxiliaires auront tous leurs centres sur la ligne sc; les points extrêmes de la courbe se détermineront comme dans l'épure précédente.

898. L'exécution de ces épures suppose que la surface de révolution est projetée sur un plan perpendiculaire à son axe; s'il en était autrement, et que cette surface fût donnée dans une position inclinée, on commencerait par la projeter sur un plan auxiliaire perpendiculaire à l'axe, ce qui ramènerait la question au cas précédent.

899. *Intersection d'une surface de révolution et d'une sphère.* On placera l'axe de la surface de révolution perpendiculaire au plan horizontal, et l'on prendra le plan vertical de projection parallèle au plan qui contiendra le centre de la sphère et l'axe de la surface donnée.

L'épure étant ainsi disposée, on emploiera, comme surfaces auxiliaires, des sphères ayant leurs centres sur l'axe de la surface donnée. Chaque surface auxiliaire coupera la sphère

donnée et la surface de révolution suivant des cercles perpendiculaires au plan vertical, et qui, par conséquent, se projetteront sur ce plan par des lignes droites. Les intersections de ces droites feront connaître les points de la courbe cherchée. Ainsi, par exemple, **fig. 439,** la sphère dont le centre est en c', et qui a pour rayon $c'a'$, coupera la surface de révolution suivant deux cercles projetés sur le plan vertical par les droites $a'd'$, $h'k'$, et la sphère donnée, suivant un cercle dont la projection verticale sera $m'n'$; l'intersection de ce dernier cercle avec les deux cercles $c'd'$, $h'k'$, donnera quatre points qui seront projetés verticalement, deux au point o' et les deux autres en u'. Pour avoir les projections horizontales de ces mêmes points, on projettera horizontalement les deux cercles $a'd'$, $h'k'$, et l'on abaissera les deux perpendiculaires $o'o$, $u'u$. Une seconde sphère auxiliaire fera connaître quatre nouveaux points, et ainsi de suite.

Pour plus de symétrie dans la construction de l'épure, on a pris les sphères auxiliaires concentriques, mais on pouvait s'en dispenser; la seule condition essentielle ici, étant que les centres de ces sphères soient placés sur l'axe de la surface de révolution.

900. Les mêmes moyens pourraient être employés pour *trouver la courbe de pénétration de deux surfaces de révolution dont les axes se couperaient;* mais, dans ce cas, après avoir choisi un plan vertical de projection parallèle au plan qui contiendrait les deux axes, il faudrait nécessairement prendre le point d'intersection de ces axes pour centre des sphères auxiliaires; et si dans l'exemple précédent nous avons pu prendre pour centre tel point de l'axe que nous avons voulu, c'est parce que la sphère pouvant être considérée comme surface de révolution dans tous les sens, le point que nous avions choisi pouvait toujours être regardé comme l'intersection des deux axes.

901. Il résulte de ce qui précède que, pour avoir l'intersection d'une surface de révolution avec un cylindre, on pourra employer des cylindres comme surfaces auxiliaires; pour l'intersection avec un cône on emploiera des cônes,

et pour l'intersection avec la sphère, on fera usage des sphères.

902. Il est bien entendu, comme nous l'avons déjà dit, que si par suite de la disposition particulière des données, quelques points n'étaient pas déterminés avec assez de précision, il faudrait avoir recours à d'autres moyens, comme, par exemple, des plans parallèles au plan horizontal ou au plan vertical. Si l'on emploie des plans perpendiculaires à l'axe de la surface de révolution, on aura l'avantage de couper cette surface suivant des cercles ; de sorte qu'il n'y aura plus qu'à construire les lignes suivant lesquelles ces mêmes plans couperont la seconde surface.

903. Dans le cas de l'intersection avec une sphère, des plans perpendiculaires à l'axe de la surface de révolution couperont les deux surfaces suivant des cercles. Il en serait de même s'il s'agissait de *deux surfaces de révolution dont les axes seraient parallèles.*

904. Chacun des trois moyens de solution que nous venons d'exposer peut être employé à la recherche de la courbe provenant de la section d'une surface de révolution par un plan. Il suffit de considérer successivement cette dernière surface comme un cylindre ou un cône dont les directrices seraient droites, ou comme la surface d'une sphère dont le rayon serait infini.

905. Dans le premier cas, **fig. 440**, on supposera que le plan donné est une surface cylindrique qui a pour directrice la trace horizontale vx et pour génératrice la trace verticale vz.

Cette dernière ligne déterminera la direction des cylindres auxiliaires qui auront pour directrices les différents parallèles de la surface donnée.

Ainsi, le cylindre qui contiendrait le parallèle ac, $a'c'$ aurait pour trace horizontale la circonférence $a''c''$; les intersections de cette courbe avec la trace vx du plan donné détermineront les deux droites $m''m$, $m'''m'$, parallèles à

la trace verticale *vz*, et les intersections de ces droites avec le parallèle *ac*, *a'c'* feront connaître les deux points cherchés *mm'*.

906. Si l'on considère le plan donné comme un cône dont la directrice serait une ligne droite, on pourra prendre pour sommet le point *ss'*, suivant lequel ce plan est percé par l'axe de la surface donnée.

Dans ce cas, les cônes auxiliaires ayant pour directrices les différents parallèles de la surface donnée seront droits et à bases circulaires.

On n'a construit sur l'épure que celui de ces cônes qui déterminerait le point le plus bas et le plus élevé de la courbe demandée.

Sa trace horizontale *uu''* doit être tangente à la trace *vx* du plan donné.

Au lieu de construire la projection verticale de la génératrice *su''*, on a préféré rabattre cette ligne dans le plan du méridien *su*.

907. Enfin, si l'on voulait considérer le plan donné comme la surface d'une sphère dont le rayon serait infini, il faudrait employer un plan auxiliaire de projection vertical et perpendiculaire au plan donné: pour le reste on agirait comme au numéro 899.

908. *Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes ne se renc ntrent pas.* On prendra l'un des plans de projection perpendiculaire à l'axe de l'une des deux surfaces données, et le second plan de projection parallèle aux deux axes.

Supposons, par exemple, **fig. 441, pl. 89**, que la surface AA' soit perpendiculaire au plan horizontal, la projection de cette surface sera limitée par celle de son plus grand parallèle, et sa projection verticale sera une section méridienne.

La surface inclinée BB' étant également parallèle au plan vertical, sa projection, sur ce plan, se composera d'une section méridienne, et pour construire la projection horizontale, il faudra opérer comme nous l'avons dit au n° 872.

Cela étant fait, on coupera les deux surfaces par un plan auxiliaire *pp* que nous supposons ici parallèle au plan vertical de projection.

La section de la surface AA′ par le plan auxiliaire *pp* sera une courbe *asa*; la section de la surface BB′ se composera des deux courbes *zvz*, et les intersections de ces dernières lignes par la courbe *asa* donneront les quatre points *u*, *u*′...., qui devront faire partie des courbes de pénétration demandées (785).

La section des deux surfaces par un second plan auxiliaire déterminera quatre autres points.

Un troisième plan auxiliaire en donnera encore quatre, et ainsi de suite.

909. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'entrer dans quelques détails sur la construction des courbes *asa*, *zvz*.

La première de ces deux lignes ne présentera aucune difficulté, puisqu'il suffira d'élever des perpendiculaires à la ligne AZ, par les points où la trace *pp* du plan auxiliaire rencontre les projections horizontales des parallèles que l'on aura dû établir d'avance sur la surface AA′.

Pour faciliter la construction des deux courbes *zvz*, il faudra également établir un certain nombre de parallèles sur la projection verticale de la surface BB′.

Mais pour éviter la construction des ellipses qui représenteraient les projections horizontales de toutes les circonférences de cercle, on les projettera sur un plan auxiliaire *qp*′ perpendiculaire à l'axe de la surface inclinée BB′, puis on rabattra cette nouvelle projection B″ en la faisant tourner autour de l'horizon projetant du point *q*, ou de tout autre point pris à volonté dans le plan *qp*′.

Les parallèles de la surface BB′ seront représentés sur la nouvelle projection B″ par des cercles concentriques, et les intersections de ces circonférences par la trace *pp* du plan auxiliaire feront partie de la courbe cherchée. Il ne restera donc plus qu'à faire revenir tous ces points à leur place.

Pour y parvenir, on les projettera d'abord sur le plan horizontal *qp*″ que l'on fera revenir dans la position *qp*′, d'où

chacun des points cherchés devra être ramené par une perpendiculaire au plan qp', sur le parallèle auquel il doit appartenir. Ainsi le point m, projeté en m', viendra se placer en m'', d'où on déduira sa projection verticale m'''. Pour plus d'ordre on fera bien de numéroter les parallèles sur les deux projections B′ et B″, et l'on diminuera le travail en choisissant de préférence ceux qui ont des rayons égaux, afin qu'ils aient une projection commune sur la figure B″.

On devra aussi choisir la position des plans coupants auxiliaires, de manière à obtenir les points les plus essentiels des deux courbes de pénétration. Ainsi, par exemple, si on veut obtenir les points suivant lesquels ces courbes touchent le méridien principal de la surface AA″ on coupera les deux surfaces par le plan vertical $p'p'$ qui contient l'axe de cette surface. Le plan $p''p''$ déterminera les points situés sur la section méridienne de la surface BB′.

910. La ligne $n'o'n'$ étant la projection verticale des deux courbes nen (874), les cylindres projetants de ces lignes pourront être employés comme surfaces auxiliaires.

Les courbes provenant de l'intersection de ces cylindres avec les parallèles de la surface AA′ couperont la ligne $n'o'n'$ en quatre points dont les projections horizontales appartiendront au contour de la projection horizontale B.

911. *Surface du second degré.* Dans tout ce qui précède, nous avons raisonné d'une manière générale, afin que les opérations indiquées puissent convenir à toutes les surfaces de révolution, quelque soit le contour de leurs sections méridiennes.

Mais, dans quelques cas particuliers, il sera possible de simplifier les opérations.

Supposons, par exemple, que les deux surfaces données soient une paraboloïde et une hyperboloïde de révolution, les sections de ces deux surfaces par les plans coupants auxiliaires seront les courbes du second degré, qui pourront, par conséquent, être construites ou au moins vérifiées par leurs propriétés géométriques.

De plus, si l'on emploie, comme cela est le plus simple, des plans parallèles entre eux, toutes les lignes suivant lesquelles ces plans couperont une même surface seront semblables entre elles.

Toutes les sections dans l'hyperboloïde auront pour asymptotes communes les deux droites $xo'x$ qui sont les asymptotes de la section méridienne principale, et cette propriété sera d'autant plus commode qu'il suffira de connaître un point de chaque section pour être en état de la construire promptement (387).

912. Une autre propriété déjà citée des courbes du second degré facilitera le tracé de la projection horizontale de la surface inclinée ; c'est que la courbe suivant laquelle cette surface est touchée par le cylindre projetant qui l'enveloppe doit être plane, et qu'elle se projettera par conséquent sur le plan vertical par une ligne droite.

Cette courbe est une hyperbole, et si on pouvait en construire les asymptotes, la projection horizontale ne présenterait plus aucune difficulté.

913. Pour obtenir ce résultat, nous rappellerons que si l'on faisait tourner autour de l'axe ck de la surface inclinée, l'une des asymptotes $xo'x$ de la section méridienne, on engendrerait le cône circulaire asymptote de cette même surface (807).

Les génératrices formant les limites de la projection horizontale de ce cône seraient les asymptotes de l'hyperbole qui limite la projection horizontale de la surface.

De là résulte la construction suivante :

La droite rt, perpendiculaire sur l'asymptote $xo'x$, coupera l'axe ck en un point t qui sera le centre de la sphère inscrite dans le cône asymptote ; les deux circonférences bb, dd seront les projections de cette sphère.

Enfin, les droites hoh, tangentes à la circonférence dd, et limites de la projection horizontale du cône, seront les asymptotes de l'hyperbole formant le contour de la projection horizontale de la surface BB'.

On se rappellera (646) que les points de tangence i, i peuvent être déterminés par la perpendiculaire abaissée du point i', suivant lequel la sphère est touchée par les deux plans verticaux tangents au cône asymptote.

914. Dans quelques occasions où l'on n'aurait pas d'autre but que d'ajuster deux surfaces de révolution, on pourrait se dispenser de construire la projection horizontale de la surface inclinée ; les projections B′ et B″ de cette surface suffisant, avec celles de la surface A, pour déterminer tous les points des deux courbes de pénétration.

915. *Intersection de deux ellipsoïdes de révolution* A *et* B, **fig. 444.** On concevra, **fig. 443**, la sphère C, enveloppée par deux ellipsoïdes A′ et B′, semblables et parallèles aux surfaces données. Ces deux surfaces auront un axe commun projeté par le point v et qui sera égal au diamètre de la sphère inscrite. De plus elles se pénétreront suivant deux ellipses qui auront pour projection les droites aa, cc.

Or, les deux ellipsoïdes A′ et B′ étant parallèles et semblables aux ellipsoïdes données A et B, il en résulte que si on coupe ces dernières surfaces par des plans tels que $p'q'$ parallèles à celui qui contient l'ellipse aa, on obtiendra pour sections des ellipses semblables et parallèles à cette dernière courbe, et l'on pourra toujours trouver un plan de projection sur lequel toutes ces ellipses se projetteraient par des cercles (541).

916. On arriverait au même but en coupant les deux surfaces données par des plans parallèles à celui qui contient l'ellipse cc. On choisira celui de ces deux systèmes de plans coupants qui donne les meilleures intersections.

917. Il n'est pas nécessaire que les centres de deux ellipsoïdes auxiliaires coïncident avec celui de la sphère inscrite; il suffit que ce dernier point soit à l'intersection des deux axes. Cela est une conséquence du théorème suivant, dont la démonstration ne peut être placée convenablement que dans un traité d'*Algèbre appliquée*.

Toutes les fois que deux courbes du second degré sont tangentes à une même circonférence, de manière qu'elles forment par leurs intersections un quadrilatère circonscrit, les diagonales passant par les sommets opposés de ce quadrilatère curviligne, et les cordes qui joignent deux à deux les points de tangence opposés, se coupent en un même point.

Le théorème cité au n° **867** n'est qu'un cas particulier de celui que nous venons d'énoncer, parce que les côtés rectilignes du quadrilatère circonscrit peuvent, dans ce cas, être considérés comme des variétés de courbes du second degré.

918. Il résulte de ce qui précède que si la parabole A″ et l'hyperbole B″, **fig. 445**, sont les sections méridiennes de deux surfaces de révolution circonscrites à une même sphère, les ellipses provenant de la section de ces deux surfaces par un plan *pq* se confondront, puisqu'elles auront le même axe *aa*, et un point commun *c*, situé sur les deux cercles *zx*, *vu*, suivant lesquels la sphère inscrite est touchée par les deux surfaces dont il s'agit. Il en serait de même de la section des mêmes surfaces par le plan *p'q'*.

919. On pourra donc résoudre la question du n° 798 par une série d'opérations analogues à celles que nous avons indiquées pour deux ellipsoïdes de révolution.

1° On décrira, **fig. 445**, un cercle quelconque auquel on circonscrira une parabole et une hyperbole semblables aux sections méridiennes des deux surfaces données A et B, **fig. 441**.

2° On coupera ces dernières surfaces par un système de plans parallèles à celui qui contient l'une des deux ellipses *aa* ou *a'a'*, **fig. 445**.

Les sections des deux surfaces données par ces plans seront des ellipses semblables.

3° On prendra un plan de projection sur lequel toutes ces ellipses se projetteraient par des cercles dont les intersections suffiront pour déterminer tous les points des deux courbes de pénétration.

CHAPITRE III.

Surfaces réglées.

920. Définitions. On donne, en général, le nom de *surfaces réglées* à celles qui sont engendrées par une ligne droite qui se meut suivant certaines conditions. Dans le cas le plus général, on peut supposer que la génératrice est assujettie à s'appuyer sur trois courbes que l'on nomme les *directrices* de la surface.

Cette condition suffit pour déterminer chaque position de la génératrice; car une droite qui passant par un point de la première courbe glisserait en s'appuyant sur la seconde serait déterminée de position, au moment où elle rencontrerait la troisième.

921. Dans quelques surfaces, la génération est déterminée par d'autres conditions. Ainsi, par exemple, dans les *surfaces cylindriques*, que l'on peut regarder comme cas particuliers des surfaces réglées, puisque la génératrice est une ligne droite, on donne ordinairement une directrice, et les deux autres sont remplacées par la condition que toutes les positions de la génératrice soient parallèles entre elles.

Dans les *cônes*, deux des directrices sont remplacées par cette condition, que toutes les génératrices contiennent le sommet. Enfin, dans les *surfaces normales*, la condition que la génératrice soit constamment perpendiculaire à une surface donnée permet de n'employer qu'une directrice ; mais tous ces cas particuliers pourront facilement se ramener au

cas général ; car on pourra toujours, dans chaque cas, prendre pour directrice trois courbes quelconques situées sur la surface, de manière qu'elles soient coupées par toutes les génératrices.

922. L'une des trois directrices peut encore être remplacée par cette condition, que *deux positions consécutives de la génératrice se trouvent toujours dans un même plan*, et c'est en cela que consiste le caractère des *surfaces développables*. Les surfaces réglées qui sont privées de la propriété d'être développables se nomment *surfaces gauches*.

923. Enfin, on peut remplacer l'une des directrices par cette condition que la génératrice, dans son mouvement, reste toujours parallèle à un plan donné que l'on nomme *plan directeur*

Ce dernier genre de surfaces réglées devant être fréquemment employé dans les applications, nous en ferons une classe particulière ; ainsi nous distinguerons deux espèces principales de surfaces réglées :

1° Les surfaces réglées qui ont trois directrices ;

2° Les surfaces réglées qui ont deux directrices et un plan directeur.

924. Surfaces réglées qui ont trois directrices. Soient **fig. 446, pl. 90,** (AA′), (BB′), (CC′) les trois directrices d'une surface réglée ; on veut construire la génératrice qui passe par le point *ss′*.

Concevons un cône qui ait pour sommet le point *ss′* et pour directrice la courbe BB′ ; le point suivant lequel la surface de ce cône sera percée par la courbe CC′ appartient à la génératrice cherchée. En effet, la droite *su*, *s′u′*, située sur la surface du cône auxiliaire, coupera en un point *vv′* la courbe BB′ que nous avons prise pour directrice de ce cône. Elle s'appuiera donc sur les trois directrices de la surface réglée suivant les points *ss′*,*vv′*,*uu′*.

Pour obtenir le point *uu′*, on construira (790) la courbe *b′*, provenant de l'intersection du cône auxiliaire par le cylindre vertical qui contient la courbe CC′ ; l'intersection des

deux courbes b' et C' fait connaître la projection verticale du point uu'.

En recommençant cette construction, on aura autant de positions de la génératrice que l'on voudra.

Si la directrice BB′ était une ligne droite, le cône auxiliaire serait remplacé par un plan, et la question serait alors réduite à déterminer le point où ce plan couperait la troisième directrice CC′ (463).

Il est bien entendu que l'on pourra, si on le juge plus commode, employer la courbe C comme directrice du cône auxiliaire, et chercher l'intersection de ce cône par la directrice B.

On fera bien aussi de s'assurer que les génératrices obtenues coupent les trois directrices de la surface (59).

925. Lorsque l'une des trois directrices est une ligne droite, la construction des génératrices devient extrêmement simple, si l'on projette la surface sur un plan perpendiculaire à cette directrice droite.

Prenons pour exemple, **fig. 448**, la surface réglée ayant pour l'une de ses directrices un arc de cercle AA′ parallèle au plan vertical de projection, et dont le centre est au-dessous du plan horizontal ; la seconde directrice est le demi-cercle CC′, aussi parallèle au plan vertical et ayant son centre dans le plan horizontal ; enfin la troisième directrice est la droite BB′, située dans le plan horizontal, et perpendiculaire au plan vertical de projection.

Cette troisième directrice se projetant sur le point vertical en un seul point B′, toutes les projections verticales des génératrices doivent concourir à ce point : de sorte que pour construire, par exemple, celle qui passe par le point ss', on tracera s'B′, et la projection verticale u' du point u sera connue par l'intersection de cette ligne avec C′. En abaissant la perpendiculaire du point u', on aura u; ainsi su sera la projection horizontale de la génératrice demandée.

Dans cette construction, le plan s'B′B, perpendiculaire au plan vertical, tient lieu du cône auxiliaire que nous avons employé précédemment pour résoudre le cas général.

La courbe $zo'x$ est la trace verticale de la surface.

Si la directrice BB′, en passant toujours par le centre de la directrice CC′, cessait d'être située dans le plan horizontal et qu'elle s'inclinât en s'approchant du centre de la directrice AA′, la forme de la surface se rapprocherait de celle du cône oblique, et elle deviendrait une surface de cône au moment où la directrice BB′ contiendrait les centres des deux autres directrices.

926. Je prendrai pour second exemple, **fig. 449**, la surface ayant pour directrices les deux cercles verticaux AA′, CC′, élevés sur les côtés du parallélogramme $mnpq$, et la droite BB′ perpendiculaire au plan vertical de projection, et passant par le centre parallélogramme ; la construction se fera comme dans l'épure précédente. Les projections verticales des génératrices concourent toutes au point B′; la courbe $zo'x$ est la trace verticale de la surface.

Si le parallélogramme $mnpq$ était un rectangle, les deux cercles AA′, CC′, auraient la même projection verticale, et la surface serait un cylindre perpendiculaire au plan vertical de projection ; si au contraire les projections verticales des deux cercles s'écartaient jusqu'à ce que la diagonale pn fût perpendiculaire au plan vertical, la surface se composerait de deux moitiés de cône qui auraient leurs sommets l'un au point p, l'autre au point n.

927. Surfaces réglées qui ont un plan directeur. Lorsqu'on prend un plan directeur pour déterminer la génératrice d'une surface réglée, cela revient à supposer que la troisième directrice est une droite ou une courbe plane dont tous les points seraient situés à une distance infinie ; car, dans ce cas, la génératrice ne pouvant rencontrer cette courbe qu'à l'infini, doit rester constamment parallèle au plan qui la contient.

928. En prenant le plan directeur pour plan de projection, la construction de ces sortes de surfaces devient extrêmement simple.

Soient, par exemple, **fig. 447**, les deux directrices AA′, CC′, le plan vertical étant le plan directeur.

Toutes les génératrices devant être parallèles au plan vertical de projection, leurs projections horizontales seront parallèles à la ligne AZ ; d'où il résulte qu'en élevant des perpendiculaires par les points où ces projections rencontrent celles des directrices, on aura les projections verticales correspondantes. Ainsi, après avoir construit *su* parallèle à la ligne AZ, on élèvera les perpendiculaires *ss′*, *uu′*, et la projection verticale *s′u′* sera déterminée.

Le cône auxiliaire que nous avons employé dans le principe général se trouve ici remplacé par un plan parallèle au plan vertical de projection et ayant la droite *su* pour trace horizontale.

Si le plan directeur était incliné, le cône auxiliaire serait remplacé par un plan incliné parallèle au plan directeur. On pourra étudier ce cas comme exercice, mais dans la pratique il sera toujours plus simple de prendre un plan de projection perpendiculaire au plan directeur.

929. Parmi les cas particuliers, nous devons surtout remarquer les surfaces auxquelles on a donné le nom de *conoïdes*.

On nomme ainsi toute surface ayant un *plan directeur*, et une *droite* pour l'une de ses deux directrices.

Soit, **fig. 450**. La première directrice est le demi-cercle AA′ ; la seconde directrice est la droite CC′, perpendiculaire au plan horizontal, et le plan directeur étant horizontal, on pourra commencer par la projection verticale ou par la projection horizontale de la génératrice. Dans le premier cas on construirait la projection verticale parallèle à la ligne AZ, et si l'on voulait commencer par la projection horizontale, on la ferait passer par C. La courbe *zo′n* est la trace verticale de la surface. Si tous les points suivant lesquels les génératrices coupent la directrice verticale CC′ étaient rapprochés en un seul, la surface deviendrait un cône, et c'est par suite de cette analogie qu'on lui a donné le nom de *conoïde*.

930. *Second exemple.* Soit prise, **fig. 451**, la courbe AA′ pour première directrice ; pour seconde directrice, la verticale CC′, le plan directeur étant horizontal, on pourra, pour construire une génératrice, commencer par la projection verticale *c′u′*, parallèle à la ligne AZ ; ou par la projection horizontale *c*C, que l'on fera passer par le point C.

Cette surface se nomme *conoïde héliçoïde :* elle est du genre des conoïdes, puisque ayant un plan directeur, elle a de plus une droite pour directrice ; et le nom d'*héliçoïde* lui vient de ce que sa seconde directrice est une *hélice*.

931. Toutes les surfaces *héliçoïdes* ne sont pas en même temps *conoïdes ;* il faut pour cela, nous l'avons déjà dit, que l'une des directrices soit droite.

Quelquefois la génératrice devra, dans son mouvement, rester parallèle à un plan directeur, et s'appuyer sur deux hélices de même pas et à bases concentriques.

D'autres fois le plan directeur est remplacé par la condition que la génératrice s'appuiera sur une troisième directrice. ou qu'elle touchera un cylindre donné, ou qu'enfin elle sera normale à une surface ou tangente à une courbe.

932. Surfaces développables. Nous avons dit (922) qu'une surface réglée est *développable*, toutes les fois que deux positions consécutives et infiniment rapprochées de la génératrice se trouvent toujours dans un même plan.

On peut supposer, en effet, **fig. 453, pl. 91,** que la portion de surface *acx*, comprise entre deux génératrices consécutives, tourne autour de l'une d'elles jusqu'à ce qu'elle soit venue se placer dans le prolongement de l'espace *cez*.

On fera tourner ensuite l'espace *a′ez* pour le rabattre dans le prolongement de *evo*, et ainsi de suite jusqu'à ce que la surface tout entière soit étendue sur le plan *a‴su*.

933. La courbe *xzou*, qui contient tous les points d'intersection des génératrices, se nomme une *arête de rebroussement ;* les génératrices étant infinies, il en résulte que l'a-

rête de rebroussement d'une surface développable partage la totalité de cette surface en deux parties bien distinctes A et A', **fig. 452**, que l'on nomme les deux *nappes* de la surface.

934. L'arête de rebroussement peut être considérée comme formée par le contour d'un polygone dont chaque côté infiniment petit est la portion de génératrice comprise entre les deux points suivant lesquels cette ligne est rencontrée par la génératrice qui suit et par celle qui précède.

Chaque génératrice étant le prolongement de l'un des petits côtés de ce polygone, est par conséquent une tangente à l'arête de rebroussement, et cette propriété est souvent prise pour définition des surfaces développables que l'on considère comme *engendrées par une droite qui se meut de manière à rester constamment tangente à une courbe.*

935. Si tous les points de tangence se réunissaient en un seul, la surface deviendrait un cône, **fig. 454**, et l'arête de rebroussement, réduite en un seul point, formerait le sommet du cône.

Ainsi, *le cône est une surface développable dont l'arête de rebroussement est un point.*

Le cylindre est une surface développable dont l'arête de rebroussement est un point situé à une distance infinie.

936. L'arête de rebroussement d'une surface développable est en général une courbe à double courbure ; mais si cette ligne devenait plane, la surface deviendrait un plan, puisqu'elle serait le lieu géométrique des tangentes à une courbe plane.

Nous allons étudier un exemple particulier de surface développable.

937. Supposons que la courbe *auc,a'u'c'*, **fig. 455**, soit une portion d'hélice, si nous construisons (481) un certain nombre de tangentes à cette courbe, la surface qui contiendra toutes ces tangentes sera réglée, puisqu'elle aura une droite pour génératrice ; de plus, elle sera héliçoïde puisque

sa directrice sera une hélice (930, 931). Enfin, elle sera développable, puisque toutes ses génératrices seront tangentes à une même courbe, qui sera son arête de rebroussement (934).

938. *Développement.* Les projections des génératrices ayant été obtenues en opérant comme nous l'avons dit au n° 483, proposons-nous de construire le développement de la surface.

On remarquera d'abord que les deux tangentes (a-1) (a'-1'), (c-9) (c'-9'), étant parallèles au plan vertical de projection, elles doivent être projetées sur ce plan dans leur véritable grandeur.

On tracera, **fig. 456**, la droite c''-9'' égal à la tangente c'-9' et a''-9'' égal à la tangente a'-1'; de sorte que c''-a''', différence de ces deux tangentes, sera égal au développement de l'arc d'hélice compris entre les deux points aa' et cc'.

La différence de hauteur des points cc' et aa', **fig. 455**, étant égale à huit fois la seizième partie du pas de l'hélice, on partagera la distance c'-a''', **fig. 456**, en huit parties égales, et l'on portera la moitié d'une de ces parties de c'' en y et de a''' en s; de sorte que la distance ys sera égale à sept fois la huitième partie de $c''a'''$.

Cela étant fait, on construira une série de secteurs circulaires ayant pour bases les arcs 9''-8''=9-8, 8''-7''=8-7, etc., et pour rayons successifs les droites c''-9'' = c'-9', 8'''-8'' = 8^{iv}-9'', 7'''-7'' = 7^{iv}-9'', etc.

On se contentera, pour tracer cette figure, de faire les cordes 9''-8'' = 9-8, 8''-7'' = 8-7, etc.; d'où il résulte que les arcs sous-tendus ne seront pas rigoureusement égaux, puisqu'ils appartiennent à des cercles dont les rayons seront différents; mais cette manière d'opérer, suffisamment exacte pour les applications, est analogue à celle que nous avons indiquée pour construire les développements du cylindre et du cône.

Il est d'ailleurs évident que l'on pourra augmenter l'exactitude en traçant, **fig. 455**, un plus grand nombre de génératrices.

939. La courbure de l'hélice auc,$a'u'c'$ étant uniforme dans

toute son étendue, il en résulte que dans le développement elle se transforme en une circonférence de cercle, tangente au polygone formé par le prolongement des rayons de la courbe 9″-6″-1″; de sorte que cette dernière ligne sera la développante du cercle *c″-6‴-a″*.

On pourra, comme vérification, chercher le centre du cercle en élevant des perpendiculaires par le milieu de deux quelconques des côtés du polygogne *c″-6″-a″*.

940. Quand on fait mouvoir la tangente *a*-1, *a′*-1′ pour engendrer la surface héliçoïde, chaque point de la génératrice décrit une hélice qui a le même pas que l'arête de rebroussement; toutes ces hélices se projettent sur le plan horizontal par des cercles concentriques tels que 1*zx*,5*rv*, et l'on pourra facilement en déduire les projections verticales.

941. Les portions de génératrices comprises entre chacune de ces hélices et celle qui forme l'arête de rebroussement de la surface étant égales, il en résulte que dans le développement, **fig. 456**, toutes les hélices de la surface seront encore représentées par des circonférences qui auraient leurs centres au point *o*.

Ainsi, l'arc de cercle 1″*z″x″* sera le développement de l'hélice 1*zx* engendrée par le point 1, et l'arc de cercle 5″*r″v″* sera le développement de l'hélice 5*rv* engendrée par le point 5.

De sorte que la **fig.** 5″*z″x″v″* est le développement de la partie de surface comprise entre les deux hélices *zx*,5*rv* et les deux génératrices *z*5,*xv*.

942. Si le centre et l'arête de rebroussement étaient en dehors de l'épure, on déterminerait avec beaucoup de soin les véritables grandeurs des côtés *z″t*,5″*i* et de la diagonale *z″i*, ce qui, avec les côtés *ti*,*z″*5″ qui sont égaux à *x′v′*, **fig. 455**, suffirait pour construire le quadrilatère *z″*5″*ti*.

Quatre quadrilatères égaux placés à côté les uns des autres formeraient alors le développement de la portion de zone 5″*v″x″z″*.

943. *Plan tangent.* Si l'on conçoit deux génératrices infiniment rapprochées, l'espace angulaire compris entre ces deux lignes pourra être considéré comme plan puisqu'il contient deux droites qui se coupent.

Cet espace prolongé devient un plan tangent à la surface développable, et les deux génératrices qui déterminent la direction de ce plan, étant infiniment rapprochées, peuvent être considérées comme une *ligne double* (452) qui est alors la génératrice de tangence.

Il résulte de là que *le plan tangent à une surface développable touche cette surface suivant toute la longueur de la génératrice de tangence.*

Cette remarque est conforme à ce que nous avons dit à l'occasion des plans tangents aux surfaces cylindriques et coniques.

944. La génératrice de tangence étant considérée comme double et provenant de la position infiniment rapprochée de deux droites qui se coupent, détermine la position du plan tangent, mais ne suffit pas pour en construire les traces.

Il faudra, dans ce cas, choisir une courbe quelconque, située sur la surface, et construire la droite qui toucherait cette courbe au point où elle coupe la génératrice de tangence. Ainsi, par exemple, pour obtenir le plan qui toucherait la surface AA′, **fig. 452**, suivant la génératrice *ze*, on déterminera la courbe *aem* située sur la surface et provenant si l'on veut de son intersection par un plan ou par toute autre surface.

On tracera la droite *th*, qui touche la courbe au point *e*, suivant lequel cette ligne est rencontrée par la génératrice de tangence.

Enfin, on construira les traces du plan qui contiendrait les deux droites *ze, th.*

Il ne restera plus dans chaque cas particulier qu'à choisir la courbe *aem*, de manière que la construction de la seconde tangence *th* soit la plus exacte et la plus simple possible.

Toutes ces questions ont été résolues dans le second livre pour les surfaces cylindriques et coniques ; nous allons en faire l'application à la surface proposée.

945. La courbe 1-5-8, **fig. 455**, étant la trace horizontale de la surface donnée, la droite h-8, perpendiculaire sur le rayon de courbure du point 8, sera la trace horizontale du plan tangent.

Cette trace sera représentée dans le développement par la droite h''-$8''$, perpendiculaire au rayon de courbure $8'''$-$8''$.

La droite hr, perpendiculaire au rayon qr, **fig. 455**, sera la trace horizontale d'un plan tangent au cylindre vertical projetant de l'hélice $5rv$.

Les droites $hr, h'r'$ seront par conséquent les deux projections de la tangente à l'hélice $5rv$, $5'r'v'$ (787).

Cette tangente sera représentée dans le développement, **fig. 456**, par la droite $h''r''$, tangente à la circonférence $5''r''v''$. Enfin, on pourra s'assurer comme vérification que h''-$8''$, **fig. 456**, est égal à h-8, **fig. 455**, et que $h''r''$ est la véritable grandeur de la tangente hr, $h'r'$.

946. Hyperboloïde à une nappe. Lorsqu'une surface réglée a pour directrices *trois lignes droites*, elle prend le nom d'*hyperboloïde à une nappe*.

Si l'une des directrices était remplacée par un plan directeur, la surface serait un *paraboloïde hyperbolique*.

Les dénominations précédentes proviennent de la nature des sections que l'on obtient en coupant ces deux surfaces par des plans.

947. Les trois droites AA′, BB′, CC′, **fig. 457**, **pl. 92**, étant les directrices de la surface, supposons que l'on veuille obtenir une génératrice passant par le point m, m', on construira le plan pp qui contient ce point et la directrice BB′; puis on déterminera l'intersection nn' de ce plan avec la directrice CC′. La droite mn, $m'n'$ sera la génératrice demandée.

Le plan pp remplace ici le cône auxiliaire dont nous avons parlé au n° 924. Ce plan sera déterminé par la directrice BB′ et par une seconde droite mu, $m'u'$ qui joindrait un point quelconque uu' de cette directrice avec le point donné mm'.

La trace verticale du plan p doit passer par les deux points

o' et s', et la trace horizontale doit être parallèle à la projection horizontale de la droite mu, $m'u'$, que, l'on a choisie dans ce but, parallèle au plan horizontal de projection, mais qui cependant pourrait être prise dans toute autre direction.

On s'assurera que la génératrice mn, $m'n'$ rencontre la directrice BB′ (59).

948. Il n'est presque jamais commode de construire sur l'épure les traces du plan auxiliaire pp. Dans ce cas, on pourra opérer de la manière suivante :

On prendra, **fig. 458**, sur la directrice BB′ deux points quelconques uu', vv'.

On joindra ces points avec mm' par les deux droites (mu, $m'u'$) (mv, $m'v'$) qui détermineront le plan auxiliaire.

Les deux droites oo', ss', perpendiculaires à la ligne AZ, feront connaître les points o' et s'. Enfin, la droite $o's'$ qui joint ces deux points sera l'intersection du plan projetant de la directrice CC′ avec le plan des deux droites (mu, $m'u'$) (mv, $m'v'$).

Cette dernière opération terminera le point nn', suivant lequel la génératrice (mn, $m'n'$) s'appuie sur la directrice CC′ (924).

949. Le plan auxiliaire qui contient le point mm' et la directrice BB′ serait déterminé complétement par cette directrice et par l'une des droites (mu, $m'u'$) (mv, $m'v'$). Il semblerait donc que l'une de ces lignes est inutile ; mais alors, pour construire la droite $o's'$, il faudrait prolonger la directrice BB′ jusqu'à sa rencontre avec le plan projetant de la troisième directrice CC′, ce qui serait souvent impossible, et dans tous les cas moins commode que la construction précédente, puisque l'on peut toujours choisir les deux points uu' et vv' de la manière qui convient le mieux à la disposition de l'épure.

950. Paraboloïde hyperbolique. Soient données les deux directrices AA′, BB′ et le plan directeur PP : pour obtenir la génératrice qui coupe la directrice AA′ au point mm', on construira :

1° Les deux traces du plan P'P', qui contient le point donné m, m', et qui est parallèle au plan directeur PP (93) ;

2° Les deux projections n et n' de l'intersection du plan P'P' avec la deuxième directrice BB' du paraboloïde ;

3° Les deux projections mn, $m'n'$ de la génératrice demandée.

951. Au lieu de construire les traces du plan directeur, on préfère presque toujours déterminer la direction de ce plan par la condition qu'il soit parallèle à deux droites données.

Supposons, par exemple, que les droites AA', BB', **fig. 460**, sont les deux directrices d'un paraboloïde hyperbolique, dont le plan directeur serait parallèle aux deux droites XX' et ZZ' ; on veut construire la génératrice qui contient le point m, m', pris à volonté sur la directrice AA' ; on tracera par le point mm' :

1° La droite mx, $m'x'$ parallèle à XX' ;

2° La droite mz, $m'z'$ parallèle à ZZ'.

Le plan des deux droites (mx, $m'x'$) (mz, $m'z'$) sera parallèle au plan directeur, et contiendra par conséquent la génératrice demandée.

Pour obtenir le point suivant lequel cette génératrice s'appuie sur la seconde directrice B, B', on concevra le plan vertical projetant de cette dernière ligne.

L'intersection de ce plan avec celui des lignes (mx, $m'x'$) (mz, $m'z'$) sera la droite $x'z'$, et le point nn', suivant lequel cette ligne rencontre la directrice BB', détermine la génératrice mn, $m'n'$.

952. Il ne faut pas négliger les abréviations qui peuvent résulter du choix des plans de projection. Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'un hyperboloïde à une nappe, on devra, toutes les fois que la disposition de l'épure le permettra, projeter la surface sur un plan perpendiculaire à l'une de ses trois directrices (925).

Supposons, **fig. 461, pl. 93**, que l'une des directrices soit la droite BB', perpendiculaire au plan horizontal, et que les deux autres directrices soient les droites AA' CC' ; les projections horizontales des génératrices concourront toutes au

point B, et par conséquent leur construction ne présentera aucune difficulté. Ainsi, après avoir construit la projection horizontale *s*B de l'une des génératrices, on élèvera les perpendiculaires *ss'* *uu'*, jusqu'à ce qu'elles rencontrent les projections verticales des directrices AA', CC', et l'on aura la droite *s'u'* pour projection verticale de la génératrice.

La courbe *zo'x'* est la trace verticale de la surface ; *vz* et B*q* en sont les traces horizontales ; ces courbes sont des arcs d'hyperbole.

953. S'il s'agit d'un paraboloïde, on devra, autant que possible, prendre un plan de projection perpendiculaire au plan directeur. Ainsi :

Les droites AA', CC', **fig. 462**, étant prises pour directrices d'un *paraboloïde hyperbolique*, on agira comme nous l'avons fait (928) pour le cas où les directrices étaient courbes.

La trace verticale de la surface est la droite *z'x'*, et les deux arcs d'hyperbole *vx'*, *nk*, en sont les traces horizontales.

954. Dans le paraboloïde projeté, **fig. 463**, le plan directeur *p* étant perpendiculaire au plan vertical de projection, toutes les projections verticales des génératrices seront parallèles entre elles et à la trace verticale du plan directeur. Les courbes *zx*, *vn* sont les traces de la surface.

955. Sur la figure **464**, le plan directeur étant perpendiculaire aux deux plans de projection, les projections des génératrices seront perpendiculaires à la ligne AZ.

Si l'on veut construire les traces de la surface, il faudra projeter d'abord les directrices et ensuite les génératrices sur le plan directeur qui est rabattu à droite de l'épure.

956. Sur la figure **465**, le plan directeur est parallèle à la ligne AZ. Dans ce cas, on emploiera un plan auxiliaire de projection *p'* perpendiculaire au plan directeur.

Les droites A'' et B'' seront les projections des directrices sur le plan auxiliaire *p'*, la projection *s''u''* d'une génératrice

sera parallèle à la droite pq, qui est la trace du plan directeur.

957. La même disposition d'épure peut être appliquée au cas où le plan directeur p aurait une inclinaison quelconque. Ainsi, par exemple, **fig. 466**, on pourra toujours employer un plan auxiliaire de projection p' perpendiculaire à l'une des traces du plan directeur, et par conséquent perpendiculaire à ce plan.

Les droites A″ et B″ seront les projections des directrices sur le plan auxiliaire p', et les projections des génératrices seront parallèles à la droite pq, qui est l'intersection du plan directeur p avec le plan auxiliaire de projection p'.

958. Les sections de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique par des plans sont des courbes du second degré dont l'espèce dépend de la direction des plans coupants.

959. Ces propositions n'ayant qu'un rapport indirect avec le but de cet ouvrage, j'engagerai le lecteur à les étudier dans les traités d'*Algèbre appliquée*. Mais parmi les propriétés des deux surfaces qui nous occupent, il en est une qui se rattache si intimement avec les questions que nous aurons à résoudre par la suite, que je crois devoir en donner ici la démonstration.

960. Double génération. L'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique diffèrent des autres surfaces réglées par cette propriété remarquable, *qu'elles peuvent être engendrées par une ligne droite de deux manières différentes.*

961. *Double génération de l'hyperboloïde à une nappe.* Soient AB,CD,EF, **fig. 467, pl. 94**, les trois directrices d'un hyperboloïde à une nappe, AE, GH, BF étant trois positions de la génératrice de cette surface. Je dis que si l'on prend ces trois dernières lignes pour directrices d'un second hyperboloïde, ces deux surfaces y coïncideront dans toute leur étendue et n'en feront par conséquent qu'une seule.

Cela revient à prouver qu'une droite quelconque *mn* qui s'appuierait sur les trois premières directrices couperait toujours une droite quelconque *pq* qui s'appuierait sur les trois autres. Alors il sera démontré que toutes les génératrices de la première surface coupent toutes les génératrices de la seconde, et que, par conséquent, les deux surfaces se confondent.

Ce principe est la conséquence de quelques théorèmes dont nous allons donner la démonstration.

962. *Si une transversale coupe les trois côtés d'un triangle ou leur prolongement, le produit des trois segments discontinus, c'est-à-dire qui n'ont pas d'extrémité commune, est égal au produit des trois autres segments pareillement discontinus.*

Soient, **fig. 468**, le triangle ABC et la transversale PQS, formant par ses intersections avec les côtés les six segments PA, PB, QA, QC, SB, SC.

Menons CO parallèle à AB ; on aura

$$PB : OC = SB : SC,$$
$$OC : PA = QC : QA.$$

Multipliant les deux proportions, et réduisant, il vient

$$PB : PA = SB \times QC : SC \times QA ;$$

d'où

$$PB \times SC \times QA = PA \times SB \times QC ;$$

ce qu'il fallait démontrer.

963. *Si sur les côtés d'un quadrilatère gauche, on prend quatre points qui soient dans un même plan, le produit des quatre segments discontinus est égal au produit des quatre autres segments également discontinus.*

Soit, **fig. 469**, le quadrilatère ABCD. Si les quatre points P, Q, R, S, sont dans un même plan, les trois lignes BD, PQ, RS concourront en un point M, intersection des trois plans ABD, BCD, PQRS.

D'après cela, la transversale PQM coupant les côtés du triangle ABD, on aura (962)

$$BP \times AQ \times DM = PA \times QD \times BM.$$

La transversale RSM donnera

$$BM \times DS \times CR = SC \times RB \times DM.$$

Multipliant ces deux équations et réduisant, on aura

$$BP \times AQ \times DS \times CR = PA \times QD \times SC \times RB.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

964. Réciproquement, *si quatre points sont situés sur les côtés d'un quadrilatère gauche, de manière que le produit des quatre segments discontinus soit égal au produit des quatre autres segments pareillement discontinus, je dis que ces quatre points seront dans un même plan.*

Soit, **fig. 470**, le quadrilatère gauche ABCD et les quatre points P, Q, R, S, tel que l'on ait

$$AP \times BQ \times CS \times DR = PB \times QC \times SD \times RA.$$

La transversale PQM donne

$$PB \times QC \times AM = AP \times BQ \times CM.$$

La transversale RSK donne

$$SD \times RA \times CK = CS \times DR \times AK.$$

Multipliant les trois équations précédentes et réduisant, on a

$$AM \times CK = CM \times AK,$$

qui devient

$$CK\,(AC + CM) = CM\,(AC + CK),$$

d'où

$$CK \times AC + CK \times CM = CM \times AC + CK \times CM.$$

Réduisant,

$$CK = CM.$$

Donc, les deux points M et K n'en doivent faire qu'un ; donc, les droites PQ, RS se coupent en un même point de la ligne

AC ; et les quatre points P, Q, R, S sont par conséquent dans un même plan.

C'est ce qu'il fallait démontrer.

965. Revenons à la figure **467**, article (961). Il s'agit de prouver qu'une génératrice quelconque mn du premier hyperboloïde coupe nécessairement une génératrice quelconque pq du second.

Or, la ligne GH s'appuyant sur les trois directrices primitives AB, CD, EF, coupe la seconde au point u. Les quatre points C, G, D, H sont par conséquent dans un même plan, et par le principe du n° 963, on doit avoir

$$EC \times AG \times BD \times FH = CA \times GB \times DF \times HE.$$

La ligne mn, s'appuyant sur les mêmes directrices, coupe CD en z, et les quatre points C, m, D, n sont dans un même plan, ce qui donne

$$CA \times nB \times DF \times nE = EC \times Am \times BD \times Fn.$$

Enfin, la ligne pq s'appuyant sur les trois droites AE, GH, BF, coupe GH en v, et les quatre points p, G, q, H étant dans même plan, on a

$$pA \times GB \times qF \times HE = Ep \times AG \times Bq \times FH.$$

Multipliant les trois équations qui précèdent et réduisant, on a

$$pA \times mB \times qF \times nE = Ep \times Am \times Bq \times Fn.$$

Donc, puisque les quatre points p, m, q, n sont situés sur les côtés du quadrilatère gauche, de telle manière que le produit de quatre segments discontinus est égal au produit de quatre autres, il en résulte (964) que ces quatre points sont dans un même plan et que les droites mn, pq se coupent en un point y.

Donc enfin, puisqu'une génératrice quelconque de la première surface est toujours coupée par une génératrice quelconque de la seconde, il en résulte, comme nous nous proposions de le démontrer, que *toutes les génératrices du premier*

hyperboloïde rencontrent toutes les génératrices du second, et que, par conséquent, les deux surfaces coïncident et n'en font qu'une seule.

966. Propriétés du paraboloïde hyperbolique. On démontre en géométrie que *les parties de deux droites comprises entre des plans parallèles sont proportionnelles entre elles.*

Soient, **fig. 471,** les deux lignes AB, CD, coupées par les plans P, P′, P″, parallèles entre eux. On aura

$$Am : mB = Cn : nD.$$

Or les positions diverses de la génératrice d'un paraboloïde hyperbolique étant déterminées par des plans parallèles au plan directeur (950), on peut dire en général que :

Les directrices d'un paraboloïde hyperbolique sont coupées par les génératrices en parties proportionnelles.

967. Réciproquement, *si deux droites sont coupées par trois autres en parties proportionnelles, ces trois dernières lignes seront parallèles à un même plan.*

Supposons, **471,** que l'on ait

$$Am : mB = Cn : nD.$$

Si les droites AC, *mn*, BD n'étaient pas parallèles à un même plan, concevons une ligne *mo*, située dans un plan parallèle en même temps aux droites AB, BD ; on aurait

$$Am : mB = Co : oD;$$

mais à cause du rapport commun, il viendrait

$$Cn : nD = Co : oD;$$

d'où

$$Cn : Co = nD : oD;$$

résultat absurde, d'où il résulte que les trois droites BD, *mn*, AC sont parallèles à un même plan.

968. On peut conclure de ce qui précède, que : *Si une*

droite s'appuie sur deux autres en la coupant toujours en parties proportionnelles, la surface engendrée sera un paraboloïde hyperbolique.

969. *Si l'on prend pour directrices d'une surface réglée trois droites parallèles à un même plan, cette surface sera un paraboloïde hyperbolique.*

Soient prises pour directrices, **fig. 472**, les trois droites AC, mn, BD, parallèles au plan P, et supposons que AB, zx, CD, soient trois positions de la génératrice.

Les droites BD, mn et AC étant parallèles à un même plan, couperont les deux lignes AB, CD, en parties proportionnelles (966) ; de sorte que l'on aura

$$Am : mB = Cn : nD ;$$

d'où l'on tire

$$mB \times Cn = Am \times nD.$$

De plus, la génératrice zr, s'appuyant sur les trois droites BD, mn, AC, coupera la seconde en o, ce qui donnera (852)

$$Am \times Bx \times Dn \times Cz = mB \times rD \times nC \times zA.$$

Multipliant cette équation par la précédente, il vient

$$Bx \times Cz = xD \times zA,$$

où

$$Bx : xD = Az : zC.$$

Donc la génératrice zx coupera toujours les directrices BD, AC, en parties proportionnelles, et par conséquent (968) la surface engendrée sera un paraboloïde hyperbolique, ayant un plan directeur P′ parallèle aux droites AB, CD.

On pourra donc supprimer l'une des trois directrices BD, mn, AC, et la remplacer par le plan directeur P′.

970. *Double génération du paraboloïde hyperbolique.* Soit un paraboloïde hyperbolique ayant pour directrices les deux droites AB, CD, mn, et pour plan directeur le plan P.

Les génératrices BD, mn, AC, couperont les directrices AB, CD en parties proportionnelles, et l'on aura

$$Bm : mA = Dn : nC,$$

d'où

$$Bm \times nC = mA \times Dn. \qquad (1)$$

Concevons actuellement un second paraboloïde hyperbolique qui aurait pour directrices les deux droites AC, BD, et dont le plan directeur serait P′, parallèle aux droites AB, CD, qui par conséquent seront deux positions de la génératrice.

Si nous supposons que zx soit une troisième génératrice de ce deuxième paraboloïde, on aura (966),

$$Az : zC = Cx : xD,$$

d'où

$$Az \times xD = zC \times Bx. \qquad (2)$$

Multipliant l'équation (1) par l'équation (2), il viendra

$$Bm \times Az \times nC \times xD = mA \times zC \times Dn \times Bx ;$$

d'où on peut conclure (964) que la génératrice mn, du premier paraboloïde, coupera la génératrice zx du second.

Ce que nous venons de démontrer, étant indépendant des positions particulières des deux génératrices mn et zx, il en résulte que *toutes les génératrices du premier paraboloïde rencontreront toutes les génératrices du second, et que par conséquent les deux surfaces coïncideront dans tous leurs points et n'en feront qu'une seule*, ce qu'il fallait démontrer.

971. Il est très-essentiel de remarquer que lorsqu'on prend pour directrices les droites AB, CD, le plan directeur P est parallèle aux génératrices BD, AC ; tandis que si l'on prenait ces dernières lignes pour directrices, le plan directeur P′ serait parallèle aux droites AB, CD, qui alors seraient deux génératrices de la deuxième surface.

En général, *le plan directeur de la première génération est parallèle aux deux génératrices de la seconde, et réciproquement, le plan directeur de la seconde génération est parallèle aux directrices de la première.*

972. Plans tangents. *Construire un plan tangent en un point donné sur la surface d'un hyperboloïde à une nappe.*

La surface de l'hyperboloïde pouvant être engendrée par une droite de deux manières différentes, si l'on fait passer par le point donné les génératrices appartenant à chacun de ces deux systèmes de génération, on aura deux droites situées dans la surface, et qui détermineront le plan tangent (780).

Soient, **fig. 473, pl. 95**, AA′, BB′, CC′, les trois directrices d'un hyperboloïde à une nappe, et le point *mm′* donné sur l'une des génératrices *m*X, *m′*X′ : cette droite pouvant être considérée comme une première tangente, il ne reste plus qu'à en obtenir une seconde. Pour y parvenir, on construira (947) deux autres génératrices YY′,ZZ′, et prenant les trois droites XX′, YY′, ZZ′, pour directrices de la seconde génération, on construira la génératrice T*m*, T′*m′*, qui, avec *m*X, *m′*X′, déterminera le plan tangent.

973. Si l'on peut projeter la surface sur un plan perpendiculaire à l'une de ces directrices AA′, **fig. 475**, cela simplifiera la construction des génératrices XX′, YY′, ZZ′, et les opérations indiquées au n° 947 ne deviendront nécessaires que pour obtenir la seconde tangente T*m*, T′*m′*.

974. *Construire un plan tangent en un point donné sur la surface d'un paraboloïde hyperbolique.*

Supposons que les droites AA′ et BB′, **fig. 474**, soient les deux directrices d'un paraboloïde hyperbolique dont le plan directeur serait parallèle aux deux droites VV′ et UU′.

La génératrice XX′ étant la première tangente, il s'agit d'obtenir la seconde tangente TT′.

Pour y parvenir, on construira d'abord (951) une seconde génératrice YY′, puis les droites XX′, YY″ étant prises pour directrices de la seconde génération, on construira les droites (*ma, m′a′*) (*mb, m′b′*), parallèles aux deux premières directrices AA′, BB′, et le plan déterminé par ces droites, étant parallèle à la seconde génération (971), contiendra la généra-

trice mT, m'T que nous prendrons pour deuxième tangente, et qui avec mX, m'X′ déterminera le plan tangent.

975. Sur la figure **476**, la première génération du paraboloïde est parallèle au plan vertical de projection, ce qui facilite la construction des génératrices XX′ et YY′. Pour obtenir la seconde tangente mT, mT″ on opérera comme au n° 974.

Sur la figure **477**, le plan directeur est perpendiculaire au plan vertical de projection, et sur la figure **478**, il est parallèle à la ligne AZ.

976. *Construire un plan tangent à une surface réglée quelconque, en un point pris sur cette surface.*

Soient, **fig. 479**, **pl. 96**, A, B, C les trois directrices d'une surface réglée; on veut construire un plan tangent par un point m donné sur cette surface.

La génératrice mX qui contient le point donné pouvant être prise pour une première tangente, il ne reste plus qu'à en construire une seconde. Pour cela, on pourrait couper la surface donnée dans une direction quelconque par un plan qui contiendrait le point m, puis mener par ce point une tangente à la courbe de section (779); mais ce moyen, suffisant dans un grand nombre de cas, n'est susceptible d'une exactitude rigoureuse que lorsque la courbe provenant de la section est telle que l'on puisse y mener géométriquement une tangente. Lorsque cela n'aura pas lieu, et que la question proposée exigera une grande exactitude, on cherchera s'il existe dans la longueur de la génératrice, qui contient le point donné, trois points par lesquels on puisse mener des tangentes à la surface, et après avoir construit ces tangentes D, E, F, on les prendra pour directrices d'un hyperboloïde à une nappe qui touchera la surface donnée dans toute la longueur de la génératrice mX; de sorte que les deux surfaces se touchant, tout plan tangent à l'une d'elles sera aussi tangent à l'autre. La question ne consistera donc plus qu'à construire un plan tangent à l'hyperboloïde, ce que nous savons faire (972).

Ainsi, par exemple, étant donnés, **fig. 480**, les trois direc-

trices A, B, C, et le point de tangence m, situé sur la génératrice mX qui sera la première tangente.

Voici quel sera l'ordre des opérations :

1° Par les points a, b, c, suivant lesquels la droite mX rencontre les courbes A, B, C, on construira les trois tangentes D, E, F qui seront les directrices de l'hyperboloïde tangent ;

2° On construira (947) les deux lignes Y et Z, génératrices de cet hyperboloïde, et l'on prendra les trois droites X, Y, Z pour directrices de la deuxième génération ;

3° On construira la génératrice mT qui s'appuie sur les trois droites X, Y, Z ; de sorte que les deux droites mX et mT détermineront le plan tangent.

977. On remarquera toutefois que l'exactitude rigoureuse du résultat est soumise à cette condition, que l'on pourra mener des tangentes à la surface en trois points différents de la génératrice qui contient le point donné ; mais comme les directrices des surfaces réglées que l'on emploie dans les arts sont presque toujours des courbes définies, on pourra construire les tangentes à ces courbes aux points où elles sont coupées par la génératrice.

978. Supposons, **fig. 481**, que l'on soit parvenu à construire les trois tangentes D, E, F ; chacune de ces tangentes, combinée avec la génératrice X, déterminera un plan tangent. Dans chacun de ces plans p, p', p'', on pourra mener une infinité de tangentes à la surface donnée, et prenant une tangente quelconque dans chacun de ces trois plans, on pourra en faire les directrices d'un hyperboloïde tangent, d'où il résulte *qu'il y a une infinité d'hyperboloïdes tangents à la surface donnée*, et que l'on pourra toujours choisir parmi tous ces hyperboloïdes celui qui, par la disposition de ses directrices, serait le plus commode pour la construction de l'épure.

Si par les points a, b, c, **fig. 481**, on mène trois plans parallèles à un plan quelconque p''', ces trois plans seront parallèles entre eux, et couperont les trois plans tangents

p, p', p'' suivant trois droites tangentes à la surface, et qui de plus seront parallèles à un même plan p''' ; de sorte qu'elles pourront (969) être prises pour directrices d'un paraboloïde hyperbolique dont la construction est ordinairement plus simple que celle de l'hyperboloïde. Enfin, le plan directeur p''' pouvant être pris d'une manière quelconque, on pourra construire une *infinité de paraboloïdes tangents*, et l'on choisira le plus favorablement disposé pour les constructions.

979. *Tout plan contenant une génératrice quelconque d'une surface réglée est un plan tangent, quelle que soit du rêste sa direction.*

En effet, **fig. 483**, indépendamment de la génératrice ac, que l'on peut considérer comme une première tangente, le plan p contiendra encore la droite th, tangente à la courbe vu, suivant laquelle il coupe les autres génératrices de la surface ; il sera donc tangent puisqu'il contiendra deux tangentes (779). Ainsi nous devons admettre cette conséquence que, pour construire un plan tangent à une surface réglée, il suffit de *le faire passer par une génératrice de cette surface.*

980. Le point de tangence m sera déterminé par l'intersection de cette génératrice avec la courbe vu, suivant laquelle la surface est coupée par le plan tangent.

Si l'on fait tourner le plan p autour de la génératrice ac, le point de tangence glissera le long de cette ligne, et changera de place pour chaque position différente du plan tangent. Si la surface réglée avait un plan directeur et que le plan tangent lui fût parallèle, le point de tangence serait à l'infini.

981. Il est très-essentiel de bien comprendre la différence qui existe entre les plans tangents aux surfaces réglées, selon que ces surfaces sont développables ou non développables.

Si la surface est gauche, le plan qui contient une génératrice ne le touche qu'en un point, qui est déterminé par la rencontre de cette génératrice avec la courbe suivant laquelle

le plan dont il s'agit coupe toutes les autres génératrices de la surface (980).

Si au contraire la surface est développable, le plan tangent est le prolongement de l'espace infiniment petit compris entre deux génératrices consécutives (943), et ces deux lignes infiniment rapprochées n'en font qu'une seule qui devient la génératrice de tangence, suivant toute la longueur de laquelle la surface est touchée par le plan tangent.

982. Ainsi, quand une surface est développable et que l'on veut tenir compte de cette propriété, on ne peut faire passer par la génératrice qu'un seul plan tangent, qui est en même temps le plan osculateur de l'arête de rebroussement, au point où cette courbe est touchée par la génératrice de tangence, et si l'on faisait tourner le plan tangent autour de cette droite, elle cesserait aussitôt d'être une génératrice de tangence, pour devenir une génératrice de section ; mais le plan n'en serait pas moins tangent à la surface que l'on considérerait alors comme un cas particulier des surfaces *gauches*, et le point de tangence serait à l'intersection de la génératrice autour de laquelle on aurait fait tourner le plan dont il s'agit, avec la courbe suivant laquelle ce plan couperait les autres génératrices de la surface.

983. Enfin, le plan tangent à une surface gauche ne la touche qu'en un point, tandis que le plan tangent à une surface développable la touche dans toute l'étendue de la génératrice de tangence.

Pour déterminer le premier, il ne suffira pas de connaître la génératrice par laquelle on veut le faire passer, il faudra encore donner le point de tangence ou quelque autre condition, tandis que le plan tangent à la surface développable sera déterminé lorsque l'on connaîtra la génératrice de tangence (944).

984. Il résulte des principes précédents que l'on pourra, dans certains cas, considérer comme tangent un plan qui couperait un cône ou un cylindre suivant une ou plusieurs génératrices.

En effet, le plan qui contient une génératrice d'un cône coupe toutes les autres au sommet, et ce point peut alors être considéré comme le sommet d'une section hyperbolique dont l'axe transverse serait égal à zéro, d'où il résulte que le plan est tangent, puisqu'il contient une tangente au sommet, et la génératrice que l'on peut toujours considérer comme une seconde tangente.

985. Cette conséquence paraît incompatible avec les principes énoncés au numéro 450, puisqu'alors nous avions admis comme condition de tangence que les deux génératrices de section seraient réunies en une seule ; mais la contradiction n'est qu'apparente et disparaît aussitôt que l'on se rappelle la différence que nous venons d'établir (983) entre les plans tangents aux surfaces *développables* et ceux qui sont tangents aux surfaces *gauches*.

Ainsi, quand on considère le cône comme surface développable, le plan doit toucher la surface dans toute l'étendue de la génératrice de tangence, tandis que si l'on considère le cône comme cas particulier de surface réglée, et que l'on fasse abstraction de la propriété qu'il possède d'être développable, le plan qui contient une génératrice quelconque peut être considéré comme tangent quelle que soit sa direction, et, dans ce cas, le plan n'est tangent qu'au sommet, puisque c'est à ce point que se rencontrent les deux tangentes qui déterminent sa position (984).

986. Cela devient encore évident pour le cône circulaire, en considérant cette surface comme un cas particulier d'hyperboloïde de révolution à une nappe. Dans ce cas, le plan conduit suivant une génératrice quelconque contient encore la tangente au sommet (802).

Tout ce que nous venons de dire du cône s'applique au cylindre. Ainsi, quand on considère cette surface comme un cas particulier des surfaces réglées, il est permis de regarder comme plan tangent celui qui contient une génératrice quelconque du cylindre ; mais alors, le point de tangence est situé à la rencontre de la génératrice de section avec la courbe sui-

vant laquelle le plan tangent couperait *à l'infini* les autres génératrices du cylindre.

Si, au contraire, comme c'est l'usage, on considère le cylindre comme surface développable, le plan tangent touche la surface suivant toute l'étendue de la génératrice de tangence, qui est alors considérée comme provenant du rapprochement des deux génératrices de section.

987 *Construire un plan tangent à une surface réglée, par un point pris en dehors de cette surface.*

On fera passer des plans par le point donné et chacune des génératrices de la surface, ce qui fera autant de plans tangents.

Ainsi, par exemple, **fig. 482**, la droite *sn* et la génératrice *n*-1 détermineront un premier plan tangent (979).

On construira la courbe *vu* suivant laquelle ce plan coupe la surface, et l'intersection de la courbe *vu* avec la génératrice *n*-1 donnera le point de tangence (980).

On obtiendra de la même manière tous les points de la courbe $mm'...m''$, suivant laquelle la surface réglée serait touchée par une surface conique qui aurait son sommet au point donné *s*.

988. *Construire un plan tangent à une surface réglée, par une droite donnée hors de cette surface.*

Soit la droite donnée *ac*, **fig. 485**, on construira (987) la ligne *zx*, suivant laquelle la surface réglée serait touchée par une surface conique ayant son sommet en un point quelconque *a* sur la droite donnée. On construira pareillement la ligne *sr*, provenant du contact par une seconde surface conique ayant son sommet en *c*, et le point *m*, intersection des deux courbes *zx*, *sr*, sera le point de tangence. Il ne restera plus qu'à faire passer un plan par les deux droites *am*, *cm* ; il est évident que ce plan contiendra la droite *ac*.

989. Cette solution est analogue à celle que nous avons employée pour construire, par une droite donnée, des plans tangents à une surface de révolution. Toute la différence

consiste dans la manière d'obtenir les courbes suivant lesquelles la surface donnée est touchée par les deux cônes auxiliaires.

Au lieu de cônes on peut employer deux surfaces réglées qui auraient pour directrices la surface et la droite donnée. La troisième directrice étant à volonté, on profiterait de cette circonstance pour introduire les simplifications qui résulteraient de la nature de la surface donnée.

Ainsi, par exemple, s'il s'agit de construire par une droite donnée des plans tangents à une surface de révolution, on coupera la surface par des plans perpendiculaires à son axe ; et par le point où chacun de ces plans rencontrera la droite donnée, on mènera deux tangentes à la section correspondante ; le lieu qui contiendra toutes ces tangentes sera la première surface auxiliaire.

On coupera ensuite la surface donnée par des plans méridiens ; et par le point où chacun de ces plans coupera la droite donnée, on construira les tangentes au méridien correspondant ; le lieu géométrique de toutes ces tangentes sera la seconde surface auxiliaire.

Les deux surfaces réglées, déterminées de cette manière, toucheront la surface donnée suivant deux courbes que l'on construira, et les intersections de ces courbes seront les points de tangence demandés.

990. *Construire un plan tangent à une surface réglée, parallèlement à une droite donnée.*

On fera passer, **fig. 486**, par chacune des génératrices de la surface réglée un plan parallèle à la droite donnée *ac* (100).

Le point de tangence se déterminera comme nous l'avons dit précédemment (980) ; la courbe de contact $mm'.....m''$ contient la suite des points suivant lesquels la surface proposée serait touchée par une surface cylindrique parallèle à la droite donnée.

991. Si cette droite était perpendiculaire au plan de projection, la projection de la courbe de contact serait la limite de la projection de la surface donnée.

Ainsi, en construisant, **fig. 484**, une suite de plans tangents perpendiculaires au plan vertical de projection, les points de tangence seront situés sur une courbe *v'm'u'* qui formera la limite de la projection verticale de la surface.

992. Surfaces normales. Il est souvent utile de construire une surface qui en coupe partout une autre suivant des angles droits. Or, si par chaque point d'une courbe située sur la surface donnée, on construit une normale, le lieu qui contiendra toutes ces droites jouira de la propriété demandée.

Toute surface engendrée de cette manière se nomme *surface normale.*

993. Étant donnée la ligne suivant laquelle on veut faire passer une surface normale, il est évident qu'il suffira de construire par chacun de ses points un plan tangent et une normale à la surface; or, cette question ayant été résolue pour toutes les surfaces que nous avions étudiées jusqu'à présent, il ne reste plus qu'à rechercher quelles sont les simplifications qui peuvent résulter dans chaque cas de la nature particulière de la surface donnée, ou de la position de cette surface par rapport aux plans de projection.

994. *Construire la surface normale qui aurait pour directrice une courbe située sur la surface d'un cylindre.*

La droite 2-3, **fig. 488, pl. 97**, tangente à la trace horizontale du cylindre donné, sera la trace horizontale d'un plan tangent (508) ; de sorte que la droite 1-4, perpendiculaire sur 2-3, sera la projection horizontale de la normale.

On opérera de la même manière pour chacun des points de la courbe donnée 1-1, 1'-1'.

995. On pourra se dispenser de construire les traces verticales des plans tangents en coupant chacun d'eux par un plan parallèle au plan vertical de projection, et contenant le point de tangence. On obtiendra ainsi un système de lignes parallèles aux traces verticales des plans tangents, et par

conséquent perpendiculaires aux projections verticales des normales dont la construction ne présentera plus alors aucune difficulté.

Ainsi, la projection verticale 1′-4′ de la normale devra être perpendiculaire sur la droite 1′-3′, etc.

Les droites 1-3, 1′-3′ peuvent être considérées comme les génératrices d'une surface réglée qui toucherait le cylindre suivant la courbe (1-1, 1′-1′), et qui aurait pour trace horizontale la courbe 3-3.

996. On peut encore obtenir les projections des normales en opérant de la manière suivante :

1° On construira, **fig. 402,** les deux projections 1″-2″, 1‴-2‴ d'une droite, parallèle à la direction du cylindre donné ;

2° On déterminera les traces de cette ligne, et l'on construira les droites 2″-3″, parallèles aux traces horizontales 2-3 des plans tangents au cylindre. Les droites 1‴-3″ seront par conséquent parallèles aux traces verticales des mêmes plans tangents.

Il ne restera plus qu'à tracer, **fig. 488**, les normales 1′-4′, perpendiculaires sur les droites 1‴-3″, **fig. 492.**

997. Si l'on voulait donner à chacune des normales une longueur déterminée telle que 1-4″, **fig. 488**, on porterait cette grandeur sur la normale rabattue 1-5″ que l'on ferait ensuite revenir à sa place.

Cette partie de l'opération n'a été conservée que pour une normale.

998. La normale en un point quelconque d'une surface donnée est toujours perpendiculaire au plan tangent, et par conséquent à toutes les droites qui sont situées dans ce plan et qui passent par le point de tangence.

Il en résulte que les normales d'un cylindre sont toujours perpendiculaires aux génératrices, et par conséquent parallèles au plan de la section droite, qui devient alors le plan directeur de la surface normale.

Cette remarque fournit un moyen d'abréviation que nous allons indiquer.

Toutes les fois que la disposition générale de l'épure ne s'y opposera pas, on devra projeter le cylindre sur un plan perpendiculaire à sa direction. Par ce moyen chaque normale sera projetée dans sa véritable grandeur, et l'on ne sera plus obligé d'en faire le rabattement.

Ce moyen de solution a été employé sur la figure **487** pour la construction de la surface qui aurait pour directrice la courbe *ac*, *a'c'*, située sur la surface d'un cylindre elliptique.

Les projections verticales des normales sont perpendiculaires aux traces des plans tangents correspondants. Chacune de ces traces (1-2) a été obtenue par le principe que nous avons énoncé au n° 369.

La courbe *vu*, *v'u'* est l'intersection de la surface normale avec un second cylindre elliptique semblable au premier. Si l'une des génératrices du cylindre devait servir de directrice à la surface normale, cette dernière surface serait un plan.

999. *Construire la surface normale qui aurait pour directrice une courbe* 1-1, 1'-1', *située sur la surface d'un cône*, **fig. 490.**

La droite (2-3), tangente à la trace horizontale du cône, sera la trace horizontale d'un plan tangent ; par conséquent (1-4), perpendiculaire sur (2-3), sera la projection horizontale de la normale, et ainsi de suite pour tous les autres points.

1000. On pourra obtenir les projections verticales des normales en opérant comme dans l'exemple du n° 995; mais, si l'on a de la place, il vaudra mieux construire par le sommet du cône un plan *s*-3″ parallèle au plan vertical de projection. Ce plan coupera tous les plans tangents, suivant un système de lignes *s*-3‴ parallèles à leurs traces verticales, et par conséquent perpendiculaires aux projections verticales des normales qu'il sera facile de construire.

En rabattant la normale 1-5, 1'-5' autour de la verticale projetante du point 1, 1', on pourra lui donner une longueur déterminée telle que 1'-4″.

La surface normale devient un plan lorsqu'elle a pour directrice l'une des génératrices du cône.

1001. *Construire la surface normale qui aurait pour directrice une courbe telle que* 1-1, *située sur une surface de révolution*, **fig. 489.**

Il suffit de construire une normale par chacun des points de la courbe donnée (832).

Je rappellerai (833) que pour construire la normale en un point quelconque d'une surface de révolution, il n'est pas nécessaire d'avoir les traces du plan tangent.

En effet, le point 1, par exemple, étant rabattu en 1′ dans le plan du méridien principal, on construira la tangente 1′-2, puis ensuite la normale 1′-3′ que l'on ramènera dans la position 1-3, en remarquant que le point *o* qui appartient à l'axe de rabattement ne doit pas changer de place.

Dans l'exemple proposé, la surface normale est limitée par la courbe suivant laquelle elle rencontre une seconde surface de révolution qui aurait pour section méridienne la ligne 3′-4′.

1002. Si l'angle suivant lequel la normale rencontre l'axe différait peu d'un angle droit, il serait convenable de construire la projection sur le plan perpendiculaire à l'axe de la surface. Sans cette précaution, les longueurs des normales ne seraient pas déterminées avec assez d'exactitude.

Il est évident que la solution précédente conviendrait également à la sphère, **fig. 491**, ainsi qu'au cylindre ou au cône circulaire, **fig. 493**, qui sont des cas particuliers de surfaces de révolution.

1003. La surface normale d'une surface de révolution est un cône circulaire, toutes les fois que la directrice est un parallèle de la surface ; et lorsque la directrice est un méridien, la surface normale devient un plan.

Les surfaces normales de la sphère sont toujours des cônes et deviennent des plans lorsque la directrice est un grand cercle.

1004. *Construire la surface normale qui aurait pour directrice une ligne quelconque située sur une surface réglée.*

Si la directrice de la surface normale demandée est une courbe, on construira par chacun de ses points un plan tangent et une normale (976), ce qui ne présentera pas d'autres difficultés que la longueur du travail.

1005. Quand la directrice est une ligne droite, ce qui arrive presque toujours dans les applications, on peut obtenir des abréviations remarquables en ayant égard aux propriétés de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique.

Nous allons étudier quelques questions de ce genre.

1006. Prenons pour exemple, **fig. 494, pl. 98,** la surface réglée que nous avions projetée au n° 925, nous proposerons de construire la surface normale qui aurait pour directrice la droite bX, B′X′, génératrice de la surface.

Si nous construisons les deux tangentes ts, $t's'$ et lz, $l'z'$, ces droites, avec la directrice BB′, qu'il est permis de considérer comme une tangente, seront les directrices d'un hyperboloïde à une nappe qui toucherait la surface donnée suivant toute la longueur de la génératrice bX, B′X′.

Il ne restera donc plus qu'à construire, par chaque point de cette dernière ligne, un plan tangent et une normale à l'hyperboloïde qui aurait pour directrices les trois droites (ts, $t's'$), (lz, $l'z'$), (B, B′) ; ce travail, qui serait fort long, peut être simplifié en opérant de la manière suivante :

Nous avons dit au n° 978 qu'il existait une infinité d'hyperboloïdes à une nappe et de paraboloïdes hyperboliques tangents à une surface réglée, suivant toute la longueur d'une même génératrice ; et comme les plans tangents et les normales seront les mêmes pour toutes ces surfaces, nous pourrons choisir celle qui donnera lieu aux opérations les plus simples.

Or, la directrice BB′ et la génératrice bX, B′X′ pouvant être considérées toutes les deux comme tangentes à la surface, le plan v'B′B qui contient ces deux lignes sera lui-même un

plan tangent, et le point b sera la projection horizontale du point de tangence ; toute ligne droite passant par le point bB′ et située dans le plan v′B′B sera par conséquent une tangente à la surface donnée.

Donc, si nous faisons passer par b un plan p′, parallèle au plan vertical de projection, la droite (bv, B′v′) résultant de l'intersection du plan v′B′B par le plan p′ sera tangente à la surface, puisqu'elle sera située dans le plan tangent v′B′B ; de plus, elle sera parallèle au plan vertical de projection, puisqu'elle sera située dans le plan p′. Nous pourrons alors remplacer l'hyperboloïde qui avait pour directrices les trois tangentes (ts, t′s′), (lz, l′z′), (B, B′) par un autre hyperboloïde dont les tangentes (ts, t′s′) (lz, l′z′) (bv, B′v′) seront les directrices, et cette dernière surface sera un paraboloïde hyperbolique, puisque ces trois directrices sont parallèles au plan vertical de projection (969), qui devient par conséquent le plan directeur de l'une des deux générations.

La question proposée est donc ramenée, par suite des opérations précédentes, à construire par la droite (bX, B′X′) une surface normale au paraboloïde hyperbolique, qui a pour l'un de ses deux plans directeurs le plan vertical de projection et pour directrices les trois droites (ts, t′s′) (lz, l′z′), (bv, B′v′), tangentes à la surface donnée.

Voici quel sera l'ordre des opérations :

Les trois droites (ts, t′s′), (lz, l′z′,) (bv, B′v′) étant les premières directrices, et la droite bX, B′X′ étant une des génératrices de la surface, il faudra construire une autre génératrice afin d'avoir les directrices de la seconde génération. Pour arriver à ce résultat, on construira par le point ss′, pris sur la directrice ts, t′s′, et par la seconde directrice lz, l′z′, un plan dont la trace horizontale sera so, et qui coupera le plan vertical contenant la troisième directrice bv, B′v′ suivant la droite o′u′ parallèle à l′z′; de sorte que le point uu′ appartiendra à la génératrice su, s′u′, qui provient du premier mode de génération. Ainsi donc, les deux droites (bX, B′X′) (su, s′u′) seront les directrices de la seconde génération qui, devant se faire parallèlement au plan vertical (971), ne présentera plus aucune difficulté.

On a tracé sur l'épure les génératrices du paraboloïde tangent ; chacune d'elles est tangente à la surface proposée en un point de la droite (bX, B'X'); de sorte qu'à ce point le plan tangent sera déterminé par la droite (bX, B'X') et par la génératrice correspondante du paraboloïde.

1007. Pour construire une normale en un point quelconque mm', on remarquera d'abord que la droite (ms, $m's'$), sera l'une des génératrices du paraboloïde tangent ; par conséquent, le plan tangent au point mm' sera déterminé par les deux tangentes (mb, m'B'), (ms, $m's'$). Il aura donc bs pour trace horizontale, et la droite mn, perpendiculaire sur bs, sera la projection horizontale de la normale ; de plus, la tangente (ms, $m's'$), parallèle au plan vertical et située dans le plan tangent, sera parallèle à la trace verticale de ce plan ; de sorte que $m'n'$ perpendiculaire sur $m's'$ sera la projection verticale de la normale.

En construisant une normale par chacun des points de la droite (bX, B'X'), on aura une surface normale suivant cette ligne.

Au lieu de construire les traces horizontales des plans tangents, il peut être commode de couper ces plans par tout autre plan horizontal tel que p'', ce qui donnera les droites m-1, m-2, m-3. Ces droites parallèles aux traces horizontales des plans tangents, seront par conséquent perpendiculaires aux projections horizontales des normales dont la construction ne présentera plus de difficulté.

Si l'on voulait donner aux normales une longueur déterminée m-n'', on rabattrait chacune d'elles comme nous l'avons fait aux nos 997 et 1000.

1008. Sur la figure **495**, on a construit la surface normale à la surface réglée que nous avions projetée au no 926.

Tout ce que nous avons dit dans l'article qui précède s'applique à l'exemple dont il s'agit, qu'il n'y a de différence que dans la nature et dans la position des lignes données ; de sorte que les opérations seront suffisamment indiquées par la similitude des lettres.

Les projections horizontales des normales devront être perpendiculaires aux droites m-1, m-2, m-3, m-4, m-5, etc., suivant lesquels les plans tangents sont coupés par le plan horizontal p''.

1009. On peut souvent, en choisissant d'une manière convenable le plan directeur du paraboloïde tangent, rendre les constructions aussi simples qu'élégantes.

Soient, par exemple, **fig. 496**, l'arc AA′ et la verticale BB′ directrices d'une *surface conoïde*, ayant le plan horizontal pour plan directeur (929).

On veut construire une surface normale suivant la génératrice (X, X′).

La droite tt', tangente au point aa', pourrait, avec la verticale BB′, être prise pour directrice d'un paraboloïde tangent, dont par conséquent la seconde génération se ferait parallèlement au plan vertical (971) ; mais il sera mieux d'opérer comme il suit :

On construira par les deux droites XX′ (tt') un plan tangent dont la trace horizontale ps sera parallèle à X, puis on mènera perpendiculairement sur X la tangente (au, $a'u'$), que l'on prendra avec la verticale BB′, pour les deux directrices d'un paraboloïde hyperbolique dont la seconde génération sera perpendiculaire à la droite XX′ ; de sorte qu'en projetant ce paraboloïde sur son plan directeur p'', que l'on a rabattu sur l'épure, la directrice X, X′ sera projetée par un seul point X″, par lesquels passeront toutes les projections des tangentes et des normales. Les projections des normales seront perpendiculaires à celles des tangentes, et leurs projections horizontales seront perpendiculaires à la droite X. La courbe zx est la section de la surface normale par le plan p''' parallèle au plan horizontal.

Après avoir exécuté les constructions précédentes, il sera facile d'en rapporter les résultats sur la projection verticale primitive.

1010. La surface normale que nous venons de construire est un paraboloïde hyperbolique égal au paraboloïde tan-

gent ; car si l'on faisait faire à cette dernière surface un quart de révolution autour de la directrice XX″, il est évident que chacune des tangentes viendrait prendre la place de la normale correspondante, et les deux surfaces coïncideraient alors dans tous leurs points.

Il en sera de même toutes les fois que l'on emploiera comme surface auxiliaire un paraboloïde hyperbolique dont le plan directeur sera perpendiculaire à la directrice de la surface normale demandée.

1011. Dans la figure **497**, AA′ est une hélice à base circulaire ; cette courbe et la verticale BB′ ont servi de directrices à une surface héliçoïde dont la génération est parallèle au plan horizontal. On veut construire une surface normale suivant la génératrice XX′.

On construira la droite *ao* tangente au cercle A, et l'on portera de *a* en *o* une longueur égale au développement de l'arc *ac*, ce qui donnera la projection horizontale de la tangente à l'hélice au point *aa′* (481).

La tangente (*ao*, *a′o′*) et la verticale BB′ seront les directrices d'un paraboloïde tangent, suivant XX′, les horizontales XX′ (*ou*, *o′u′*), génératrices de ce paraboloïde, seront les directrices de la seconde génération, qui fera parallèlement au plan vertical *p′* perpendiculaire à la droite XX′.

On opérera pour le reste comme dans l'épure précédente.

La courbe *zx* est la section de la surface normale par le plan horizontal *p*.

1012. On voit, par les deux exemples précédents, qu'il est avantageux d'employer de préférence le paraboloïde dont le plan directeur est perpendiculaire à la droite qui doit servir de directrice à la surface normale, parce que les normales, étant parallèles au plan directeur, seront égales à leurs projections sur ce plan, et qu'ensuite les angles droits que les normales doivent faire avec les tangentes, se projetteront dans leur véritable grandeur.

On pourra parvenir au même résultat par des projections auxiliaires toutes les fois que la directrice de la surface

normale sera inclinée dans l'espace d'une manière quelconque.

1013. Supposons d'abord le cas où la directrice XX′, **fig. 498** et **500, pl. 99,** serait parallèle au plan vertical de projection.

Les courbes AA′, BB′, CC′ étant les trois directrices de la surface donnée ;

Par les points *mm′*, *nn′*, *vv′*, suivant lesquels ces courbes sont rencontrées par la droite XX′, on construira les trois tangentes DD′, EE′ FF′, qui seront les directrices de l'hyperboloïde tangent.

Il s'agit maintenant de remplacer cet hyperboloïde par un paraboloïde hyperbolique dont le plan directeur *psp* serait perpendiculaire à la droite XX′, qui doit servir de directrice à la surface normale demandée. Voici quel sera l'ordre des opérations :

Les deux droites XX′ DD′ déterminent un plan qui touche la surface donnée au point *mm′*, et qui contient la droite (*ac*, *a′c′*) parallèle à la directrice XX′.

Le plan *p′*, perpendiculaire sur la droite XX′, coupera le plan des deux tangentes XX′, DD′ suivant une ligne GG′ qui sera tangente à la surface et parallèle au plan *psp*.

Les deux droites XX′, EE′ détermineront un second plan qui touche la surface au point *nn′* et qui contient la droite *ou*, *o′u′*, parallèle à la directrice XX′. La section de ce deuxième plan tangent par un plan *p″* perpendiculaire à la droite XX′ donnera une seconde droite HH′ tangente au point *nn′* et parallèle au plan *psp*.

Enfin, la droite *zx*, *z′x′* parallèle à XX′ sera située dans le plan tangent déterminé par les deux droites XX′, FF′ et la section de ce plan tangent par le plan *p‴* perpendiculaire sur XX′ donnera une troisième tangente KK′ parallèle au plan *psp*.

Les trois tangentes GG′, HH′, KK′, étant parallèles au plan *psp*, la surface réglée qui aura ces trois droites pour directrice sera un paraboloïde hyperbolique qui touchera la surface donnée dans toute l'étendue de la génératrice XX′ ;

de sorte qu'il ne reste plus qu'à construire la surface normale qui aurait cette ligne pour directrice.

Par le point *cc'*, pris à volonté sur la directrice GG', on tracera la droite *cr*, *c'r'* qui s'appuie sur un point quelconque *rr'* sur la directrice HH'

Le plan déterminé par les deux droites HH' et (*cr*, *c'r'*) coupera le plan *p'''* suivant la droite *ti*, *t'i'* parallèle à la directrice HH'; on joindra le point *ii'* avec *cc'* par la droite YY', qui, avec XX' seront les deux directrices de la deuxième génération du paraboloïde tangent (947, 971).

Les génératrices 1-2, 1'-2'... de ce paraboloïde étant parallèles au plan directeur *psp*, les projections verticales de ces lignes seront perpendiculaires à la droite X'. Les projections horizontales de ces mêmes lignes seront déterminées par la rencontre des droites 2'-2 perpendiculaires à la ligne AZ avec les projections horizontales X et Y des deux directrices du paraboloïde tangent.

On peut vérifier la position de chacune de ces lignes en la projetant sur le plan directeur qui est rabattu, **fig. 501**.

On remarquera que sur ce plan la directrice XX' se projette par un seul point X'', vers lequel, par conséquent, doivent concourir toutes les projections X''-2'' des génératrices du paraboloïde tangent.

Quand ces dernières lignes seront projetées sur la figure **501**, on construira par le point X'' une perpendiculaire sur chacune d'elles, ce qui donnera les projections X''-3'' des génératrices du paraboloïde normal.

Chacune de ces normales étant parallèle au plan directeur *psp*, sa projection sur la figure **498** devra se confondre avec celle de la tangente correspondante.

De plus, et par la même raison, toutes ces lignes se projetteront sur la figure **501**, dans leur véritable grandeur : de sorte que, si l'on veut donner à chaque normale une longeur égale à X''-3'', il suffira de décrire la circonférence (3''-3''), qui déterminera les extrémités de toutes les normales.

Les points 3''... étant ramenés sur la figure **498**, donneront la courbe 3'-3'... qui sera par conséquent l'intersection de la

surface normale demandée avec un cylindre circulaire, qui serait perpendiculaire au plan *psp*, qui aurait pour axe la directrice X, X′, X″, et pour section droite la circonférence 3″-3″.

La projection horizontale 3-3 de la même courbe sera déterminée par la rencontre des perpendiculaires et des parallèles à la ligne AZ, menées par les points correspondants des deux figures **498, 501**.

1014. Si la droite qui doit servir de directrice à la surface normale demandée était oblique par rapport aux deux plans de projection, on construirait, **fig. 499**, une projection auxiliaire sur un plan *p′* parallèle à cette directrice.

1015. Il ne sera pas nécessaire de projeter sur le plan *p′* les directrices courbes de la surface donnée ; on pourra se contenter de construire les projections des trois tangentes directrices de l'hyperboloïde auxiliaire, après quoi tout le reste du travail se ferait comme dans l'exemple précédent.

1016. Nous appliquerons les principes qui précèdent à une question que l'on rencontre quelquefois dans la construction des escaliers.

Supposons que la droite XX′, **fig. 502, 504, pl. 100**, soit assujettie à tourner en montant autour de la verticale *oo′*, de manière que tous ses points décrivent des hélices de même pas. On pourra toujours considérer trois quelconques de ces hélices comme étant les directrices de la surface réglée engendrée par la droite XX′. Il s'agit de construire la surface normale qui aurait cette droite pour directrice.

Voici quel sera l'ordre des opérations :

1° On prendra l'un des deux plans de projection perpendiculaire à la verticale *oo′* et le second plan parallèle à la droite XX′, puis on projettera (473) sur ces plans les hélices AA′, BB′, CC′, décrite par les trois points (*m*, *m′*), (*n*, *n′*), (*v*, *v′*), pris où l'on voudra sur la droite XX′. Ces hélices seront les directrices de la surface réglée primitive ;

2° En opérant comme nous l'avons dit au n° 481, on con-

struira les trois droites DD′, EE′, FF′ tangentes aux hélices AA′, BB′, CC′. Ces trois tangentes seront les directrices de l'hyperboloïde tangent et détermineront aux points (m, m'), (n, n'), (v, v') trois plans tangents qui auront pour traces horizontales les droites qa, qc, qe ;

3° Les plans tangents que nous venons d'obtenir étant coupés par trois plans p, p', p'', perpendiculaires à la droite XX′, on aura les trois tangentes GG′, HH′, KK′ qui, étant parallèles à un même plan seront les directrices du paraboloïde tangent dont le plan directeur p'' sp'' sera perpendiculaire sur la droite donnée XX′ ;

4° Le plan qui contient le point uu' et la directrice HH′, coupera le plan projetant vertical de la directrice KK′, suivant (nz, $n'z'$), parallèle à la droite (ux, $u'x'$), que l'on a prise avec intention parallèle au plan vertical qX.

L'intersection de la droite ($n'z'$), avec la directrice K′ sera un point z',z, qui, étant joint avec u,u', donnera la droite YY′ pour la seconde directrice du paraboloïde tangent ;

5° Les deux directrices XX′, YY′ et le plan directeur du paraboïde étant déterminés, le reste des opérations se fera comme an n° 1013.

On remarquera que les projections verticales XX′, YY′ des deux directrices du paraboloïde sont parallèles entre elles et perpendiculaires au plan directeur $p''sp''$, ce qui aura lieu dans toutes les questions du même genre, quels que soient les bases et le pas des hélices, pourvu que l'on ait adopté la même disposition d'épure.

En effet, le paraboloïde tangent est indépendant de la position des points par lesquels on a construit les trois tangentes DD′, EE′, FF′. Or, si nous supposons que le point mm' soit reculé jusqu'à l'infini sur la génératrice XX′, le rayon om, **fig. 504**, deviendra parallèle au plan vertical de projection, et l'angte que la tangente DD′ fait avec le plan horizontal devant diminuer à mesure que le point de tangence m s'éloigne de l'axe, il en résulte qu'au moment où ce point sera reculé jusqu'à l'infini, le plan tangent correspondant sera perpendiculaire au plan vertical de projection, et la génératrice YY′ du paraboloïde devra s'appuyer

sur une droite située à *l'infini* dans le plan projetant $X'q'q$, qui sera par conséquent le second plan directeur du paraboloïde auxiliaire (927).

1017. Le lecteur pourra s'exercer à résoudre la même question pour le cas où l'une des trois hélices directrices de la surface primitive serait remplacée par la verticale C, C', **fig. 503** et **505**.

Si alors la droite donnée XX' était horizontale, on disposerait l'épure comme au n° 1011.

1018. Tout ce que nous venons de dire sur l'emploi d'un hyperboloïde ou d'un poraboloïde tangent ne s'applique qu'aux surfaces gauches.

En effet, si la surface proposée était développable, le paraboloïde qui la toucherait suivant une de ses génératrices deviendrait un tangent, et le paraboloïde normal serait un second plan perpendiculaire au premier.

C'est ce qui a lieu pour les surfaces cylindriques et coniques dont les surfaces normales sont des plans toutes les fois qu'elles doivent contenir une génératrice.

1019. Sections planes. *Section par un plan perpendiculaire au plan de projection.*

La surface étant donnée par ses directrices, on établira sur l'épure un certain nombre de génératrices, et l'on cherchera l'intersection de chacune d'elles par le plan donné. Ainsi, **fig. 507, pl. 101**, la courbe $b'u'$ est l'intersection de la surface réglée A, A', par le plan p, perpendiculaire au plan horizontal.

On obtient de la même manière la courbe dx, provenant de l'*intersection par une surface cylindrique perpendiculaire au plan vertical.*

1020. *Intersection par une ligne.* Si la ligne donnée aa' est droite, on emploiera comme surface auxiliaire (790) un de ses plans projetants et l'on obtiendra le point mm'.

Si la ligne est courbe, comme cc'. on fera usage de la surface cylindrique projetante.

1021. Si l'on donnait la projection m d'un point de la surface AA', et qu'il fallut obtenir sa projection verticale, on construirait dans le voisinage de ce point quelques génératrices ; puis coupant la surface par un plan p perpendiculaire au plan horizontal et contenant le point donné, on construirait la courbe $b'u'$ sur laquelle devrait se trouver la projection verticale du point demandé.

Si ensuite par le point mm', ainsi déterminé, on voulait construire une génératrice de la surface, on agirait comme aux n°s 924, 927.

1022. *Section par un plan oblique.* Il suffit de chercher l'intersection du plan donné p, **fig. 508**, par chacune des génératrices de la surface, ce qui ramène la construction à celle du n° 87. On a fait usage de plans perpendiculaires au plan vertical.

1023. Pénétrations. *Intersection d'une surface réglée et d'un cylindre.*

On coupera les deux surfaces par des plans parallèles au cylindre et contenant les génératrices de la surface réglée. Ainsi, **fig. 509**, par un point nn', pris ou l'on voudra sur la droite aa', génératrice de la surface réglée AA', on construira une ligne cc' parallèle au cylindre BB' ; les deux droites aa', cc', détermineront un plan p parallèle au cylindre, et qui le coupera suivant une de ses génératrices bb', et le point uu', intersection de aa' et de bb', appartiendra aux deux surfaces, et fera partie de la courbe d'intersection. On obtiendra par ce moyen autant de points que l'on voudra.

Cela revient à construire (512) l'intersection du cylindre par chacune des génératrices de la surface réglée.

1024. *Intersection d'une surface réglée avec un cône.*

Un plan p, **fig. 510**, passant par le sommet du cône et par la droite aa', génératrice de la surface réglée, coupera le cône suivant une droite bb', et l'intersection de aa' avec

bb' fera connaître le point *uu'*, commun aux deux surfaces. Chaque point de la courbe s'obtiendra par une construction semblable.

1025. *Intersection d'une surface réglée avec une surface de révolution.*

Un plan horizontal *p*, **fig. 511**, coupera la surface réglée suivant une courbe *aa''* et la surface de révotution suivant le parallèle *bb'* ; et les deux lignes *aa'* et *bb'* se couperont en deux points *mm'*, *nn'*, appartenant à la courbe d'intersection des deux surfaces.

On agira ee la même manière pour trouver d'autres points de la courbe.

On pourrait dans certains cas employer avec succès, comme surfaces auxiliaires, des *cylindres circulaires droits*, ayant le même axe que la surface de révolution.

1026. *Intersection de deux surfaces réglées.*

Un plan vertical *p*, contenant la génératrice *aa'*, **fig. 512**, coupera la seconde surface réglée, suivant une courbe *bc*, *b'c'*, facile à construire (1019), et l'intersection de cette courbe avec la droite *aa'* néterminera un point *mm'*, commun aux deux surfaces.

On recommencera cette construction qui se réduit à chercher l'intersection de la surface réglée BB' par chacune des génératrices de l'autre surface (1020).

1027. Raccordements. La ligne d'intersection de deux surfaces réglées est en général une courbe à double courbure, **fig. 513, pl. 102.** Mais dans quelques cas particuliers elle peut être plane.

Les deux surfaces représentées sur la figure **514** se coupent suivant la droite *ac*, par une génératrice commune.

Enfin, les deux surfaces AA' et BB', **fig. 515**, se touchent, et par conséquent se raccordent suivant la génératrice commune *ac*.

1028. Deux surfaces réglées se raccorderont toutes les fois qu'elles seront touchées dans toute l'étendue d'une génératrice commune, par un même hyperboloïde, à une nappe, **fig. 517**, car il est évident qu'un plan tangent à l'hyperboloïde en un point quelconque de la génératrice *ac*, toucherait également à ce point les deux surfaces A et B, de sorte que ces deux surfaces étant touchées par les mêmes plans, suivant toute l'étendue de la génératrice commune, elles seront tangentes l'une à l'autre, et se raccorderont suivant cette ligne.

1029. En général, **fig. 516**, *si par trois points* m, n, v, *pris à volonté sur une droite quelconque* X, *on conçoit trois plans* p, p′, p″, *dirigés comme on voudra dans l'espace; si ensuite, par chacun des trois points* m, n, v, *on construit autant de courbes que l'on voudra, tangentes aux plans* p, p′, p″, *ou situées dans ces plans, toutes les surfaces réglées qui auront pour directrices trois de ces courbes tangentes chacune à l'un des plans* p, p′, p″, *se toucheront suivant toute l'étendue de la génératrice commune* X, car elles seront touchées dans toute l'étendue de cette même droite par les hyperboloïdes ou paraboloïdes qui auraient pour directrices trois droites quelconques, menées dans les plans *p*, *p′*, *p″*, par les points *m*, *n*, *v*.

Deux surfaces réglées qui se raccordent peuvent avoir une ou deux directrices communes et ne différer que par la troisième directrice.

1030. Si les deux surfaces réglées dont il s'agit étaient développables, tous les hyperboloïdes et paraboloïdes tangents se réduiraient en un seul plan qui toucherait les deux surfaces, suivant toute la longueur de la génératrice de raccordement.

Il résulte de là qu'une surface réglée gauche ne peut pas se raccorder avec une surface développable suivant une génératrice.

Enfin deux surfaces réglées ne peuvent se raccorder suivant une génératrice, qu'autant qu'elles sont toutes deux développables ou toutes deux gauches.

1031. Lorsqu'une surface courbe quelconque servira de directrice à une surface réglée, ces deux surfaces se raccorderont toujours dans toute l'étendue de la ligne qui contient les points suivant lesquels les génératrices de la surface réglée s'appuient sur la surface directrice.

1032. En général, si par tous les points d'une courbe *acu* située sur une surface donnée A, **fig. 518**, on construit des tangentes à cette surface, quelle que soit la direction que l'on aura adoptée pour ces tangentes, le lieu de l'espace qui les contiendra sera une surface réglée, se raccordant avec la surface donnée suivant la courbe qui contient tous les points par lesquels on a construit les tangentes à cette surface.

Supposons, par exemple, que les tangentes 1, 1, 1... aient été construites de manière à satisfaire à certaines conditions ; que les tangentes 2, 2, 2... aient été obtenues par une autre loi ; qu'il en soit de même des tangentes 3, 3..., et ainsi de suite. Il résultera de cette construction autant de surfaces réglées qu'il y a de systèmes de tangentes.

Toutes ces surfaces se raccorderont suivant la courbe *acu* qui partagera chacune d'elles en deux nappes. Enfin l'une quelconque des nappes de ces surfaces se raccordera toujours avec la nappe opposée de chacune des autres surfaces.

Supposons, par exemple, que la sphère AA′, **fig. 519**, ait servi de directrice à la surface réglée BB′, et que la courbe *acu* soit la ligne de contact de ces deux surfaces ; représentons par A et A′ les deux parties de la sphère, et par B et B′ les deux nappes de la surface réglée ; la combinaison de ces diverses parties produira quatre surfaces différentes, savoir :

1° La surface A + A′.
2° La surface A + B′.
3° La surface A′ + B.
4° La surface B + B′.

1033. *Pénétration rectangulaire.* Au lieu de chercher à raccorder deux surfaces, on pourra demander qu'elles se

coupent, toujours à angle droit en un point quelconque de la ligne d'intersection.

Dans ce cas, étant données une première surface et la ligne suivant laquelle elle doit être coupée par la seconde, on construirait la surface normale qui aurait cette ligne pour directrice ; puis, il ne resterait plus qu'à construire une autre surface tangente à la surface normale.

1034. En général, *lorsque l'on voudra que deux surfaces se rencontrent partout à angle droit, il faudra faire en sorte que l'une d'elles soit tangente à la surface normale de l'autre, suivant toute l'étendue de la ligne d'intersection.*

Cette remarque nous sera très-utile dans quelques applications de la géométrie descriptive.

CHAPITRE IV.

Surfaces-enveloppes.

1035. Définitions. Si l'on fait mouvoir une sphère A, **fig. 520, pl. 103**, de manière que son centre parcoure la ligne *abc*, la surface qui enveloppera toutes les positions successives de cette sphère, et qui les touchera toutes, se nommera une *surface-enveloppe*, ou simplement une *enveloppe*.

Deux positions consécutives de la sphère mobile se couperont suivant un cercle *dh*, dont le plan est perpendiculaire à la courbe parcourue par le centre. Ce cercle sera d'autant plus grand que les positions de la sphère seront plus rapprochées les unes des autres, et dans l'hypothèse d'un mouvement continu, la distance des centres étant infiniment

petite, l'intersection de deux sphères consécutives peut être considérée comme un grand cercle. On donne à ce cercle le nom de *caractéristique* de la surface.

Ce n'est ici, au surplus, qu'une manière différente d'envisager la génération des surfaces, car nous pourrions donner au cercle *dh* le nom de *génératrice*, et supposer que son centre se meut suivant la courbe *abc*, tandis que son plan serait constamment perpendiculaire à la direction de cette courbe ; alors la surface engendrée serait l'*enveloppe* des positions successivement occupées par le cercle générateur.

1036. Mais la nature des procédés analytiques qui conduisent aux résultats précédents a fait adopter la définition générale suivante :

Une surface enveloppe est le lieu qui contient toutes les intersections qui résultent des positions successives d'une surface mobile, constante ou variable de forme.

On donne le nom d'enveloppée à la surface mobile dans chacune de ses positions.

L'intersection de deux enveloppées consécutives est la caractéristique de l'enveloppe.

1037. Cette définition embarrasse ordinairement les commençants ; ils ont de la peine à reconnaître dans certains cas particuliers de surfaces-enveloppes les caractères par lesquels ils se rattachent au cas général.

Soit, par exemple, **fig. 521**, la surface AA′ à laquelle nous avons donné le nom d'ellipsoïde de révolution.

Supposons que l'on fasse mouvoir le sommet d'un cône circulaire suivant la droite *aa′*, et qu'en même temps l'angle au sommet de ce cône varie de telle sorte, que sa génératrice soit toujours tangente à la section méridienne de la surface A ; il est certain que deux de ces cônes consécutifs et infiniment rapprochés se couperont suivant un cercle perpendiculaire à l'axe, et la surface de l'ellipsoïde sera le lieu de tous ces cercles.

Or, d'après la définition précédente, les divers cônes mobiles et variables se nommeront enveloppées, et la surface

de l'ellipsoïde sera l'enveloppe. Ainsi dans cet exemple la surface-enveloppe est limitée en tous sens, tandis que l'enveloppée ne l'est pas. L'enveloppe se trouve circonscrite par l'enveloppée.

1038. Il résulte de là qu'il ne faut attacher aux dénominations précédentes qu'un sens analytique et général, indépendant des applications particulières, et que dans tous les cas l'*enveloppe est le lieu géométrique des intersections successives de l'enveloppée ;* de sorte que l'enveloppe touche ou est touchée par toutes les positions successives de l'enveloppée, mais ne les *enveloppe* pas toujours, suivant le sens que l'on attache vulgairement à ce mot.

Les mêmes réflexions se reproduiront en examinant la génération suivante de la même surface A, A'.

1039. Supposons une surface cylindrique horizontale ayant pour directrice l'ellipse *o'u';* faisons tourner ce cylindre autour de la verticale *aa* ; les positions consécutives du cylindre générateur étant infiniment rapprochées, les intersections successives ne différeront pas de l'ellipse *o'u'* qui sera la caractéristique de l'enveloppe : le cylindre mobile qui est ici l'enveloppée se trouve encore circonscrit à l'ellipsoïde, qui, d'après la définition générale, représente l'enveloppe.

1040. *Surfaces développables.* Parmi les cas particuliers de surfaces-enveloppes, nous distinguerons celui où l'enveloppée est un plan, **fig. 522** ; alors la caractéristique est une ligne droite, puisqu'elle provient de l'intersection de deux positions consécutives du plan mobile ; et l'enveloppe, lieu de toutes ces caractéristiques, est une surface réglée.

1041. Cette surface jouit toujours de la propriété d'être développable, car deux caractéristique consécutives étant les intersections d'un même plan avec celui qui précède et avec celui qui suit, ces deux droites se couperont toujours, ce qui est le caractère des *surfaces développables* (922).

La courbe *mnou*, qui passe par tous les points d'intersec-

tion des caractérisques successives, forme l'*arête de rebroussement.*

Les droites a, b, c, d, sont tangentes à la courbe *mnou* (934).

Nous allons étudier quelques exemples particuliers de surfaces-enveloppes.

1042. Si l'on fait mouvoir une sphère d'un rayon donné, de manière que son centre parcoure une hélice à base circulaire, on obtiendra une surface-enveloppe connue, dans les arts de construction, sous le nom de *vis Saint-Gilles.*

Si l'on voulait projeter cette surface, il suffirait de construire un certain nombre de positions du grand cercle, dont le plan est perpendiculaire à l'hélice.

Souvent on préfère projeter les hélices parcourues par chacun des points de ce grand cercle.

Soit, **fig. 523**, a' le centre de la sphère mobile, on construira au point a' la tangente à l'hélice parcourue par le centre (481), et la droite $a'o'$ perpendiculaire à cette tangente sera la projection du demi-grand cercle dont le plan est perpendiculaire à la direction de cette courbe ; l'inclinaison du cercle générateur étant connue, il sera facile de le construire, dans telle position que l'on voudra. Les trois ellipses (psq, $p's'q'$) sont trois positions principales de ce cercle, et les hélices tracées sur la figure **523** sont celles parcourues par les trois points pp', qq', ss'.

L'épure 524 représente une vis Saint-Gilles engendrée par un demi-cercle vertical.

Si le pas de l'hélice diminuait, la surface se rapprocherait de celle du tore ou surface annulaire (801).

1043. Plans tangents. Supposons, **fig. 526** *qu'en un point* aa' *donné sur la surface, on veuille construire un plan tangent ;* on prendra pour première tangente celle qui touche en (aa') le cercle vertical $m'a'n'$, générateur de la surface donnée. La tangente à l'hélice qui passe par le même point complétera la détermination du plan tangent. En construisant le triangle $a'b'c'$, tel que l'on ait $a'b'$ égal à trois huitièmes du pas de l'hélice, et $b'c'$ égal à trois huitièmes de la circonférence ah, l'hypoténuse $a'c'$ sera la tangente à l'hé-

lice, rabattue sur le plan p'' parallèle au plan vertical ; le point v', où cette tangente perce le plan horizontal, étant projeté en v et ramené en u, on aura au pour la projection horizontale de cette tangente ; de sorte que la droite ou sera la trace horizontale du plan tangent. Quant à la trace verticale, elle sera parallèle à la droite $a'o'$.

La droite (an, $a'n'$) menée par le point aa', perpendicu laire au plan tangent, sera une *normale*.

1044. Surfaces normales. Si par chaque point de l'hélice ash, $a's'h'$, on construit une normale, la surface qui contiendra toutes ces lignes sera une *surface normale*.

Il n'est pas nécessaire pour chaque normale de construire les traces du plan tangent. En effet, par suite de la forme régulière et constante de la surface, quelle que soit la hauteur du point de tangence; les tangentes, le plan tangent et la normale conserveront toujours la même position relative ; de sorte que les projections horizontales de ces lignes ne changeront pas et ne feront que tourner autour du point A. De là résulte cette construction.

On abaissera du centre une droite Az, perpendiculaire sur la projection de la première normale, et décrivant la circonférence zxy, toute tangente à cette courbe sera la projection horizontale d'une normale. On élèvera la perpendiculaire zz' jusqu'à la projection verticale de la normale $a'n'$, et l'on construira l'hélice (zx, $z'x'$), sur laquelle on déterminera les points où elle est rencontrée par chacune des normales.

La surface que l'on obtiendra sera *réglée :* la génératrice s'appuie sur les deux hélices (ash, $a's'h'$) (zx, $z'x'$) et touche constamment le cylindre qui contient la dernière.

Si l'on voulait donner à toutes les normales la même longueur, on les terminerait aux points où elles rencontrent un cylindre droit ayant pour trace horizontale une circonférence tel que nd.

1045. *Développement.* Dans l'industrie, beaucoup de corps sont terminés par les feuilles minces en tôle, cuivre, carton, etc.; souvent même, quoique la matière soit solide, on en détermine le contour en appliquant sur les faces planes ou

courbes des figures découpées auxquelles on fait prendre la courbure de ces faces, et que l'on nomme *panneaux* ou *patrons*. C'est donc un problème important que celui qui a pour but d'obtenir le développement des surfaces.

Nous avons déjà vu que les surfaces cylindriques et coniques se développent exactement : ce qui provient de leur caractère de surfaces développables (922).

Les surfaces de révolution se développeront approximativement en les partageant en zones ou en fuseaux (682, 812).

Il ne nous reste donc plus qu'à trouver un moyen de développer *approximativement* certaines portions de surfaces réglées ou enveloppes.

Il est évident que cela revient, étant donnée une certaine surface ou portion de surface, à trouver *une surface développable* qui diffère le moins possible de la surface proposée.

1046. Je prendrai pour exemple la surface normale que nous venons de construire dans l'exemple précédent.

Soient les mêmes données, **fig. 527,** on opérera comme ci-dessus pour obtenir les deux premières normales (an, $a'n'$) (cu, $c'u'$) ; ensuite on construira les deux cordes (ac, $a'c'$) (co, $c'o'$), etc.

Cela posé, concevons un plan par la normale (an, $a'n'$) et la corde (ac, $a'c'$), un second plan pour la seconde normale et la seconde corde, un troisième plan par la troisième normale et la troisième corde, etc. On pourra considérer tous ces plans comme les positions successives d'un plan mobile qui dans son mouvement engendrerait une surface développable (1041) différant peu de la surface donnée : en effet la surface normale se compose de petits quadrilatères gauches tels que ($ancn$) ($a'n'c'n'$), et trois angles de chacun de ces quadrilatères étant situés dans le plan mobile correspondant, il y aurait peu de différence entre les deux surfaces, surtout dans le voisinage de l'hélice (aco, $a'c'o'$), ce qui est essentiel.

Si les arcs (ac, $a'c'$) (co, $c'o'$) devenaient infiniment petits, le plan mobile serait dans chaque position, tangent à la surface normale, et l'on obtiendrait une surface développable tan-

gente à la surface normale dans toute l'étendue de l'hélice (*aco*, *a'c'o'*) (1035).

Pour obtenir cette surface on construira un plan horizontal *p*. Ce plan coupe le premier plan mobile suivant (*ns*, *n's'*), et le second suivant (*uz*, *u'z'*) ; et l'intersection *xx'* de ces deux droites appartient à la droite (*cx*, *c'x'*) qui sera la caractéristique de l'enveloppe cherchée.

En construisant un certain nombre de projections horizontales de cette ligne, et opérant du reste comme nous l'avons fait pour la normale, on obtiendra facilement les projections verticales correspondantes.

1047. La surface que nous venons de construire est connue sous le nom d'*héliçoïde développable* (937) ; chacune de ses génératrices est tangente à une hélice ayant pour base le cercle *dh*.

La figure **528** représente le développement de la surface précédente ; pour l'obtenir on construira chaque quadrilatère dans sa véritable grandeur ; les courbes *a''y''*, *b''t''*, sont des arcs de cercle (941).

1048. En général, *pour développer approximativement une surface quelconque, on la partagera en zones de peu de largeur ; puis, après avoir construit des plans tangents par tous les points de la courbe moyenne de chaque zone, on développera la surface enveloppe résultant de cette suite de plans tangents.*

1049. Sections et intersections. Nous n'entrerons pas ici dans le détail des constructions nécessaires pour obtenir les sections par des plans ou des lignes ; ce ne serait qu'une répétition de ce que nous avons dit sur l'application des principes 784 et 790. Nous nous bornerons à un seul exemple de pénétration.

1050. Supposons, **fig. 525**, que le demi-cercle *p's'q'* soit pris pour la génératrice d'une vis Saint-Gilles ; on veut avoir la courbe de pénétration de cette surface par le conoïde dont les directrices sont la verticale *uu'*, la demi-ellipse

(kdh, $k'd'h'$), et dont la génération serait parallèle au plan horizontal, le rayon vertical $o'd'$ de l'ellipse étant égal au rayon du cercle $p's'q'$.

Parmi tous les moyens qui résultent du principe général 785, on peut employer le suivant.

Un cylindre vertical à base circulaire C coupera la surface de la vis suivant une hélice a', et la surface du conoïde suivant une courbe b'. Les intersections de a' et b' donneront les points m de la courbe ; puis on recommencera pour avoir d'autres points.

La courbe b' se construit en élevant des perpendiculaires par les points suivant lesquels la trace du cylindre C coupe les projections horizontales des génératrices du conoïde.

La question que nous venons de résoudre n'est placée ici que comme exercice, et parce qu'elle a été proposée dans quelques concours ; mais dans la pratique, la recherche de la ligne de pénétration est beaucoup plus simple, parce que l'on prend ordinairement pour directrice du conoïde une courbe à double courbure projetée sur le plan horizontal par l'arc de cercle kvh, et dont le développement est une ellipse. (Voir le *Traité de la coupe des pierres ; voûte d'arête rampante et en tour ronde.*)

FIN

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

CHAPITRE Ier.

Pages.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES..... 1
Notations..... 8

CHAPITRE II.

Du point, de la ligne droite et du plan..... 29
Intersections des lignes et des plans..... 38
Parallélisme des lignes et des plans..... 45
Perpendicularité des lignes et des plans..... 48

CHAPITRE III.

Rabattements..... 59

CHAPITRE IV.

Angles des lignes..... 77
Angles des lignes et des plans..... 79
Angles des plans..... 82
Angles trièdre..... 91

CHAPITRE V.

Plans cotés..... 138

CHAPITRE VI.

Pages.
Projection des polyèdres..... 148
Projections obliques..... 152
Développements..... 155
Section des polyèdres..... 156
Pénétration des polyèdres..... 159

LIVRE DEUXIÈME.

CHAPITRE Ier.

Lignes courbes..... 164
Courbure, normale, tangente..... 165
Développantes, développées..... 167
Courbes á plusieurs centres..... 170
Lieux géométriques..... 172
Courbes d'essai..... 175
Construction des tangentes..... *id.*
Abscisses et ordonnées..... 178
Cycloïdes..... 179
Épicycloïdes..... 182
Spirales..... 184
Courbes du 2e degré..... 185
Ellipse..... *id.*
Parabole..... 191
Hyperbole..... 194
Asymptotes..... 195
Diamètres conjugués et axes de l'ellipse..... 196
Courbure des lignes du 2e degré..... 201
Rectification des courbes..... 208
Quadrature des courbes..... 223

CHAPITRE II.

Surfaces cylindriques..... 227
Cylindre projetant, courbes à double courbure..... 231

Pages.
Hélices. 236
Cylindre oblique..... 241
Section droite, développement..... 246
Plan parallèle au cylindre..... 249
Plan tangent au cylindre..... *id.*
ntersection du cylindre par une droite..... 251
Section du cylindre par un plan oblique..... 252
Limites des courbes de section..... 258
Cylindre circulaire..... 267
Intersection des cylindres..... 271
Raccordement..... 281

CHAPITRE III.

Surfaces coniques..... 286
Développement..... 289
Plan passant par le sommet du cône..... 291
Plan tangent au cône..... 292
Intersection du cône par une droite..... 293
Sections planes du cône..... *id.*
Cône elliptique..... 298
Cône circulaire..... 305
Intersection des cônes et cylindres..... 314

CHAPITRE IV.

Surface de la sphère..... 325
Méridiens et parallèles de la sphère..... 326
Développements approximatifs de la sphère..... 327
Sections perpendiculaires aux plans de projection..... 329
Plans tangents à la sphère..... 331
Intersection de la sphère par une droite..... 345
Section de la sphère par un plan oblique..... 346
Intersection des sphères, cylindres et cônes..... 350
Épicycloïde sphérique..... 367

LIVRE TROISIÈME.

CHAPITRE Ier.

Pages.
Considérations générales sur les surfaces courbes..... 371

CHAPITRE II.

Surfaces de révolution..... 384
Parallèles..... 385
Méridiens..... 386
Méridien principal..... 387
Propriétés particulières..... 388
Plans tangents aux surfaces de révolution..... 400
Projections obliques des surfaces de révolution..... 424
Intersection par une droite..... 430
Intersection par une courbe..... 432
Section par un plan oblique..... *id.*
Intersection des surfaces de révolution et des cylindres, cônes et sphères..... 434

CHAPITRE III.

Surfaces réglées..... 444
Surfaces réglées qui ont trois directrices..... 445
Surfaces réglées qui ont un plan directeur..... 447
Surfaces développables..... 449
Hyperboloïde à une nappe et paraboloïde hyperbolique..... 454
Double génération de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique..... 458
Plans tangents aux surfaces réglées..... 465
Surfaces normales..... 473
Sections et intersections des surfaces réglées..... 486
Raccordements..... 488

CHAPITRE IV.

Surfaces-enveloppes..... 491

Abbeville. Imprimé par Briez, C. Paillart et Retaux.

3 2044 050 747 773

DEC 18 1964

JUN 8 1967